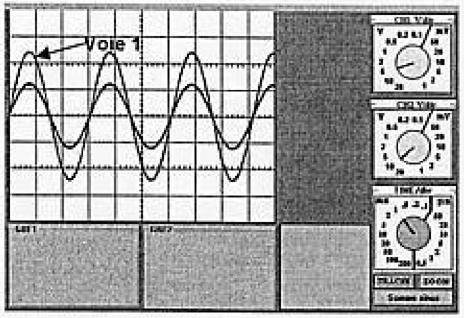
NOM		GROUPE	
PRENOM		SIGNATURE	

Exercice n° 1

Grâce aux oscillogrammes suivants, remplir les tableaux et construire les vecteurs de Fresnel: (on choisira l'origine des temps à gauche de chaque cadran)
La voie 2 est la tension aux bornes d'un dipôle et la voie 1 celle aux bornes d'un conducteur ohmique en série avec le dipôle.

Cas n°1



Période : T =

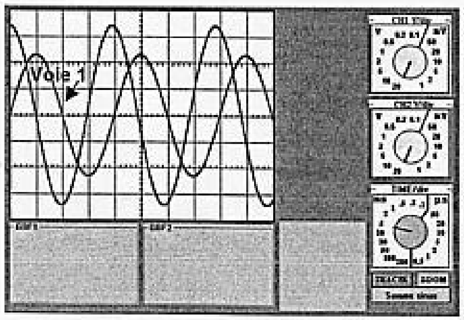
Fréquence : f =

Pulsation : ω =

Tensions maximales	U_{1max} =	U_{2max} =	Vecteurs de Fresnel
Tensions efficaces	U_{1eff} =	U_{2eff} =	
Phases à l'origine	ϕ_1 =	ϕ_2 =	
Expressions finales	$U_1(t) = \ \cos(\ \ t + \ \ )$	$U_2(t) = \ \cos(\ \ t + \ \ )$	

Q : Le dipôle est-il à caractère résistif, capacitif ou inductif ? Justifier la réponse.

Cas n°2



Période : T =

Fréquence : f =

Pulsation : ω =

NOM		GROUPE	
PRENOM		SIGNATURE	

Tensions maximales	U_{1max} =	U_{2max} =	Vecteurs de Fresnel
Tensions efficaces	U_{1eff} =	U_{2eff} =	
Phases à l'origine	ϕ_1 =	ϕ_2 =	
Expressions finales	$U_1(t) = \ \cos(\ \ t + \ \ )$	$U_2(t) = \ \cos(\ \ t + \ \ )$	

Q : Le dipôle est-il à caractère résistif, capacitif ou inductif ? Justifier la réponse.

Exercice n° 2

On donne la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

2. Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

NOM		GROUPE	
PRENOM		SIGNATURE	

Exercice n° 3

Dans tout l'exercice a est une constante élément de $\mathbb{R}$.

1. Résoudre (au dos de la page) l'équation différentielle suivante:

$$y' - \frac{2}{a}y - \frac{1}{a^2} = 0 \quad (1)$$ où y est une fonction de la variable x.

2. Résolution de l'équation différentielle $\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{a^2} = 1$ (2).

   a. On pose $Z(t) = \frac{1}{v(t) - a}$. Ecrire l'équation différentielle (3) vérifiée par Z(t).

   b. Donner les solutions Z(t) de l'équation différentielle (3).

   c. En déduire les solutions v(t) de l'équation (2).

   d. Les conditions particulières sont : v(0)=55 et a=5.

      i- Calculer $\lim_{t \to +\infty} v(t)$

      ii- Tracer v(t) (une étude de v(t) n'est pas demandée).

NOM		GROUPE	
PRENOM		SIGNATURE	

Exercice n° 4

Principe de fonctionnement d'un bac à décantation à flux horizontal

A. Etude de la chute d'une particule dans un liquide visqueux

On prépare un mélange homogène constitué d'un liquide de masse volumique $\rho_{liq} = 1{,}0.10^3\ kg.m^{-3}$ et de particules solides de forme sphérique de rayon $R = 2{,}0.10^{-6}\ m$, de masse volumique $\rho_s = 1{,}5.10^3\ kg.m^{-3}$.

1. Montrer que la masse des particules vaut $m = 5{,}0.10^{-14}\ kg$.

On dépose, à la date $t = 0$, une fine couche (dont on néglige l'épaisseur) de ce mélange homogène à la surface d'un récipient contenant le même liquide, à l'état pur, que le mélange précédent. A partir de cet instant, les particules, que l'on suppose initialement au repos, se déplacent verticalement vers le fond du récipient.
On suppose que la vitesse limite est suffisamment faible ; dans cette hypothèse, les particules sont soumises à leur poids $\vec{P}$, à la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{liq}\, \vec{g}$ et à une force de frottement $\vec{F} = -f.\vec{v}$ où $f = 3{,}1.10^{-12}$ SI représente le coefficient de frottement.
On donne $g = 9{,}8\ N.kg^{-1}$.
Pour étudier le mouvement de la particule, on se place dans un repère unidimensionnel d'axe Oz vertical dirigé vers le bas, d'origine O au niveau de la surface libre du liquide (voir annexe 1 page 7)

2. En effectuant une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité du coefficient de frottement f.

3. Système étudié : Référentiel :

4. Compléter l'annexe 1 en faisant figurer les forces s'exerçant sur la particule pendant sa chute à l'instant t.

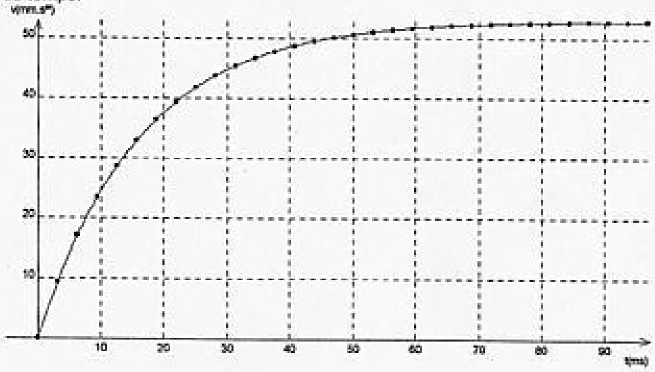
5. Etablir l'équation différentielle relative à la vitesse de la particule ; la mettre sous la forme $\frac{dv}{dt} + A.v = B$ en précisant les expressions de A et de B en fonction de f, m, g et $\frac{\rho_{liq}}{\rho_s}$.

NOM		GROUPE	
PRENOM		SIGNATURE	

6. En déduire l'expression de la vitesse limite atteinte par les particules. Effectuer l'application numérique.

7. Résoudre l'équation différentielle établie à la question 5 avec v(0)=0.

8. Une étude expérimentale a permis d'obtenir le graphe ci-dessous représentant les variations de la vitesse de la particule au cours du temps.

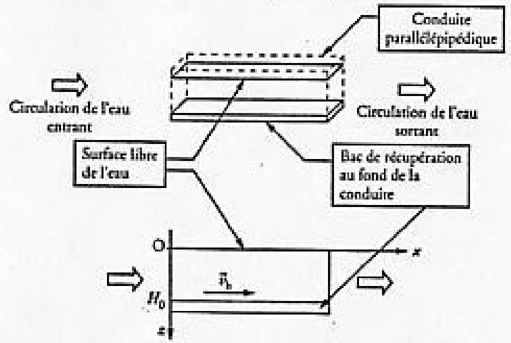


Déterminer le temps caractéristique τ_1 de l'évolution de la vitesse (méthode au choix).

NOM		GROUPE	
PRENOM		SIGNATURE	

B. Application : modélisation simple d'un bac à décantation à flux horizontal

Le principe d'un bac à décantation à flux horizontal consiste à faire circuler, à vitesse constante $\vec{v}_h$, un courant d'eau contenant des particules de masses différentes dans un dispositif que l'on peut modéliser de la façon suivante :



En fonction des caractéristiques des particules, ces dernières vont tomber au fond du bac en des endroits différents. On peut donc, par ce procédé, séparer les particules de nature différente contenues dans l'eau.
On s'intéresse au mouvement d'une particule (identique à celle de la partie A) initialement à la surface de l'eau, à la cote $z = 0$ et pénétrant dans le bac en $x = 0$.

1. En imaginant que la particule reste à la surface de l'eau, quel temps τ_2 mettrait-elle pour parcourir la longueur du bac $L = 1{,}0\ m$, si la vitesse de circulation d'eau est constante et de valeur $v_h = 0{,}10\ m.s^{-1}$?

2. En comparant les valeurs de τ_1 (déterminé à la question 8.a. de la partie A) et τ_2, justifier que l'on puisse considérer que la vitesse de la particule dans la conduite est $\vec{v} = \vec{v}_h + \vec{v}_l$ (où v_l est la valeur de la vitesse limite atteinte en chute verticale dans le fluide).

3. On déduit de l'étude précédente les grandeurs cinétiques données en annexe 2. Compléter le tableau.

4. En déduire que la trajectoire $z = f(x)$ est une droite dont le coefficient directeur α sera exprimé en fonction de m, f, v_h, g, ρ_{liq} et ρ_s.

NOM		GROUPE	
PRENOM		SIGNATURE	

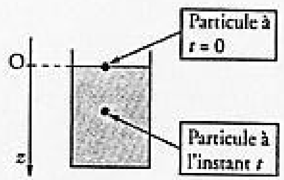
5. En réalité les particules ne sont pas toutes identiques et sont caractérisées par leur masse m.
Calculer la valeur de la masse m_c de la particule pour que cette dernière tombe dans le bac à récupération au point de coordonnées $x = L$ et $z = H_0 = 0{,}54\ m$.

6. Dans quelle zone vont tomber les particules de masses m et de même masse volumique ρ_s :

- si $m < m_c$?
- si $m > m_c$?

Justifier la réponse.

Annexe 1



Annexe 2

	projection selon Ox	projection selon Oz
accélération	$a_x(t) = 0$	$a_z(t) = 0$
vitesse	$v_x(t) = v_h$	
position		

NOM		GROUPE	
PRENOM		SIGNATURE	

Exercice n° 5

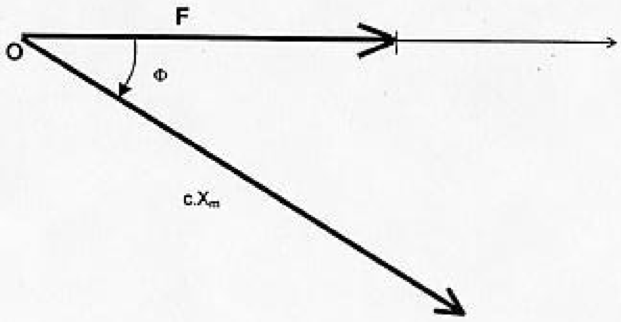
Soit un dispositif physique dont le mouvement est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F\cos(\omega\ t) \qquad (1)$$

La solution de cette équation différentielle est du type $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$ $(X_m > 0)$.

1. Donner l'expression de $\dot{x}(t)$ et l'expression de $\ddot{x}(t)$ sous la forme cosinus avec des amplitudes positives.

2. Sachant que $F \cos(\omega\ t)$ est pris comme origine des phases, représenter dans le diagramme de Fresnel l'équation (1).



3. En utilisant ce diagramme, exprimer X_m et $\tan\phi$ en fonction de F, a, b, c et ω.

NOM		GROUPE	
PRENOM		SIGNATURE	

Exercice n° 6

Soit la fonction $f(x) = -10\log_{10}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ avec $x \in \left]0;+\infty\right[$.

1. Calculer $f'(x)$ et déterminer le signe.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$

3. Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)$

4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

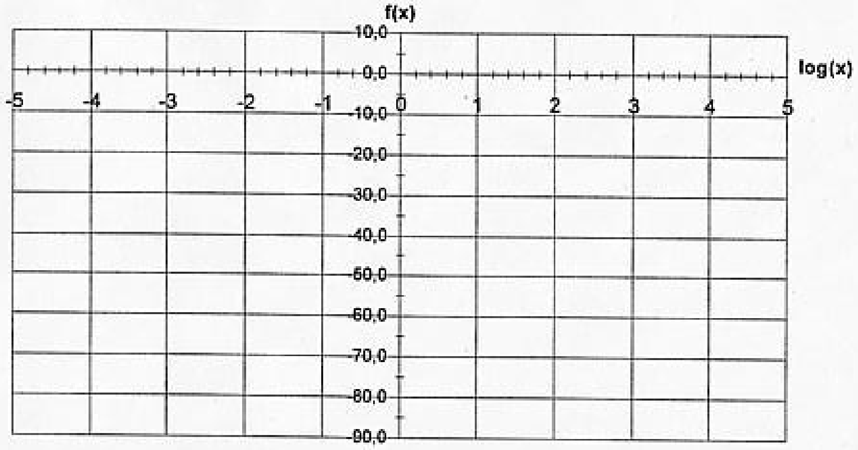
5. Calculer $a = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)}{\log_{10}(x)}$ et $b = \lim\limits_{x\to0^+}\left[f(x) - a.\log_{10}(x)\right]$

6. Compléter le tableau suivant :

X	0.0001	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000	10000
$\log_{10}(x)$									
f(x)									

NOM		GROUPE	
PRENOM		SIGNATURE	

7. Tracer sur le graphe ci-dessous
   a. en bleu, la courbe $a.\log_{10}(x) + b$.
   b. en bleu, l'asymptote à l'infini de f(x).
   c. en vert, f(x) sur le graphe précédent.



Exercice n° 7

Résoudre l'équation différentielle suivante (on pourra poursuivre les calculs au dos de cette feuille):

$\ddot{y} + 2\sigma\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 E$ avec $\sigma = 0,2$; $\omega_0 = 60$ rad/s; $E = 4V$.

Les conditions initiales sont : $y(0) = 0$ V et $\dot{y}(0) = 75$ SI

NOM		GROUPE	
PRENOM		SIGNATURE	

Exercice n° 8

On se propose dans cet exercice de comparer certaines équations de la mécanique et de l'électricité et de trouver des analogies formelles entre les diverses grandeurs de ces deux domaines de la physique. Les parties A et B sont indépendantes. La partie C utilise les résultats des parties précédentes.

Partie A :

On considère un objet de masse m, susceptible de se déplacer uniquement sur un axe Ox avec une vitesse $\vec{v} = V_x\vec{i}$ et une accélération $\vec{a}$. Sa position sera repérée par son abscisse x sur cet axe Ox.

Il est soumis à une force notée $\vec{F} = F\vec{i}$ avec F>0. On supposera qu'à t = 0, $\vec{v} = \vec{0}$ et x = 0. Le poids ne sera jamais pris en compte. ***La force*** $\vec{F}$ ***est constante.***

1. Déterminer v_x en fonction de F si $\vec{F}$ est la seule force agissant.

2. En plus de $\vec{F}$ se superpose :
   a. Une force de rappel $\vec{F_r} = -k.x\vec{i}$
      i. Donner l'équation différentielle permettant de trouver x.
      ii. En déduire l'équation différentielle permettant de trouver v_x.
      iii. Donner alors v_x en fonction de F, k, m et t. (On remarquera que $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \frac{F}{m}$)
   b. Une force de frottement $\vec{F_f} = -\alpha\vec{v}$ ($\vec{F_r}$ n'étant pas présente)
      i. Donner l'équation différentielle permettant de trouver v_x.

NOM		GROUPE	
PRENOM		SIGNATURE	

      ii. Donner alors v_x en fonction de F, m , α et t.
   c. Les deux forces précédentes $\vec{F_r} = -k.x\vec{i}$ et $\vec{F_f} = -\alpha\vec{v}$.
      i. Donner l'équation différentielle permettant de trouver v_x.
      ii. Donner alors la condition liant α, k et m pour que la vitesse oscille pseudo-périodiquement.

Partie B :

On considère un dipôle électrique. La tension à ses bornes sera notée U, le courant qui le traverse sera noté i(t) (convention récepteur). On supposera qu'à t = 0 , le courant est nul. ***La tension U est constante.***

1. Le dipôle est une bobine pure d'inductance L. Déterminer i(t) en fonction de U , L et t.

2. Le dipôle est maintenant une bobine pure L en série avec un condensateur de capacité C.
   a. Donner l'équation différentielle permettant de trouver la charge q(t) du condensateur.
   b. Donner l'équation différentielle permettant de trouver i(t).

NOM		GROUPE	
PRENOM		SIGNATURE	

c. Donner alors i(t) en fonction de U, L, C et t en supposant le condensateur déchargé à t = 0.

3. Le dipôle est maintenant une bobine pure L en série avec un condensateur de capacité C et un résistor de résistance R.
   a. Donner l'équation différentielle permettant de trouver i(t).

   b. Donner alors la condition liant L, C et R qui conduit à des oscillations pseudopériodiques de i(t).

NOM		GROUPE	
PRENOM		SIGNATURE	

Partie C :

1. Si vous comparez les résultats obtenus dans la partie A et dans la partie B vous devez trouver une analogie *formelle* (au niveau des formules). Compléter alors le tableau d'analogie suivant en trouvant la grandeur électrique correspondant à la grandeur mécanique:

Grandeur mécanique	F	v	m	k	α	x
Grandeur électrique	U	I				

2. En utilisant *uniquement* les analogies formelles précédentes, compléter le tableau ci-dessous :

La tension aux bornes d'un condensateur est $\frac{q}{C}$	L'énergie emmagasinée dans une bobine est E_L=
La puissance Joule est RI^2	La puissance dissipée dans un amortisseur est P=
L'énergie emmagasinée dans un ressort allongé de x est $\frac{1}{2}kx^2$	L'énergie emmagasinée dans un condensateur est E_C=
L'énergie cinétique d'un objet est $\frac{1}{2}mv^2$	La norme de la force de rappel d'un ressort est $\lVert\vec{F_r}\rVert = k.\lvert x\rvert$