Nb: Une partie d'exercice pourra être admise afin d'en traiter la suite.

Exercice 1

L'objet de l'exercice est d'établir un résultat destiné à la majoration de l'erreur méthodique commise lors d'une interpolation polynômiale sur un intervalle.
On considère une fonction f continue sur un intervalle fermé-borné $[a,b]$ de $\mathbf{R}$.

1.1 *Résultats techniques*

(a) On note $\|f\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} (|f(x)|)$.Justifier l'existence de $\|f\|$.

(b) Soit $\{x_0, ..., x_{n+1}\}$ $n+2$ points distincts de $[a,b]$.
On considère la fonction u définie par $u(x) = \prod_{i=0}^{n+1}(x - x_i)$.
Calculer pour tout i de $\{0, ..., n+1\}$ le réel $u'(x_i)$.

(c) En déduire, que pour toute fonction g définie sur $[a,b]$, on peut écrire en utilisant une base de Lagrange :

$$g[x_0, ..., x_{n+1}] = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{g(x_i)}{u'(x_i)}$$

(d) Soit p une fonction polynôme de degré au plus n.
Calculer $p[x_0, ..., x_{n+1}]$.
En déduire que $(f-p)[x_0, ..., x_{n+1}] = f[x_0, ..., x_{n+1}]$

1.2 *Majoration globale de l'erreur sur* $[a,b]$

(a) En considérant la fonction $g = f - p$, montrer que

$$|f[x_0, ..., x_{n+1}]| \leq \|f - p\|\, M$$

où M est le réel positif défini par

$$M = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{|u'(x_i)|}$$

(b) Indiquer brièvement comment le (a) permet de majorer globalement une erreur méthodique d'interpolation.

1.3 *Etude d'un cas singulier*

On pose $a = -1; b = 1; \quad x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)$ pour i de $\{0, ..., n+1\}$.
On note (T_n) la famille des Tchebychev normalisés dont on rappelle que le coefficient dominant est donné par $\alpha_n = 2^{n-1}$ pour n de $\mathbf{N}^*$.

(a) Montrer que q donnée par $q(x) = (1-x^2)T'_{n+1}(x)$ et u admettent les mêmes zéros. En déduire l'existence et la valeur d'une constante k_n telle que : $u = k_n q$.

(b) Montrer qu'en $x_1, ..., x_n$ la fonction T_{n+1} admet des extrema locaux.

(c) Montrer que pour tout i de $\{1, ..., n\}$, on a

$$T'_{n+1}(x_i) = 0 \quad \text{et} \quad T_{n+1}(x_i) = (-1)^i$$

(d) Montrer que pour tout entier naturel k on a

$$(1-x^2)T''_k(x) = xT'_k(x) - k^2 T_k(x)$$

(e) Déduire de ce qui précède l'expression de $u'(x_i)$ dans ce cas particulier et montrer qu'alors $M = 2^n$.

.../...

Exercice 2

L'objet de l'exercice est de définir une écriture matricielle pour l'obtention de B-splines standard.
On rapporte l'espace $\mathcal{E}$ à un repère orthonormé direct.

2.1 On considère le vecteur noeud $\tau = (0, 1, 2, 3, 4)$.
Déterminer la fonction $B_{0,3}$ sur $[0; 4[$ en utilisant la définition de récurrence des B-splines.

2.2 On considère les fonctions $B_{0,3,j}$ ($j \in \mathbf{Z}$) ,translatées de $B_{0,3}$,définies par:
$\forall x \in \mathbf{R}$ $B_{0,3,j}(x) = B_{0,3}(x - j)$.
Montrer que: $\forall x \in \mathbf{R}$ $\sum_{j\in\mathbf{Z}} B_{0,3,j}(x) = 1$
Vocabulaire:Les fonctions $B_{0,3,j}$ sont appelées B-splines uniformes de degré trois dont la suite de noeuds est l'ensemble des éléments de $\mathbf{Z}$.

2.3 On considère une fonction spline uniforme S définie par:
$\forall x \in \mathbf{R}$ $S(x) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} B_{0,3,j}(x) P_j$ où les $(P_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ constituent une famille de points de contrôle de $\mathcal{E}$.
(a) Quel problème se pose ? Vérifier que cette définition a un sens.
t désigne pour la suite, sauf indication contraire, un réel de $[0, 1[$.
(b) Montrer que: $S(t) = \sum_{j=-3}^{0} B_{0,3}(t - j) P_j$.
(c) Déduire de 2.1 l'écriture de $S(t)$ en fonction des P_j ($-3 \le j \le 0$) et de $\{1, t, t^2, t^3\}$.
(d) En déduire l'écriture :

$$S(t) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{-3} \\ P_{-2} \\ P_{-1} \\ P_0 \end{bmatrix}$$

(e) Comment s'écrira $S(t)$ pour un paramètre t de $[i, i+1[$?
(f) Quel est l'intérêt de la démarche du 2.3 ?

2.4 Par une démarche analogue on admettra que la courbe de Bézier de points de contrôle P_0, P_1, P_2, P_3 est l'ensemble des points $B(t)$ de $\mathcal{E}$ définis par:

$$S(t) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad \text{pour } t \in [0; 1[$$

En déduire l'écriture matricielle qui définit la surface de Bézier, ensemble des points de $\mathcal{E}$ donnés par:

$$C(u, v) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} B_i^3(u) B_j^3(v) P_{i,j}$$

où $(u, v) \in [0; 1[^2$ et $(P_{i,j})_{0 \le i \le 3,\, 0 \le j \le 3}$ représentent la famille des points de contrôle.