/

MT44 Printemps 2003

Examen final du 27 juin 2003

Durée : deux heure(s)

Tout document autorisé - Calculatrice autorisée.

On rédigera l'exercice 1 sur une feuille et les exercices 2 et 3 sur une autre.

NB : Tout résultat intermédiaire pourra être admis afin de permettre la résolution d'une question ultérieure.

Exercice 1 (Une méthode d'intégration adaptative).
Soit f une fonction de $[A, B]$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^4.

1. (a) Rappeler les expressions de l'approximation de l'intégrale de f sur l'intervalle élémentaire $[\alpha, \beta]$ par la méthode de Simpson, ainsi que l'expression de l'erreur.

   (b) Mêmes questions sur le «grand intervalle» $[A, B]$.

2. On suppose dans cette question que f «oscille fortement» au voisinage de A : on supposera par exemple qu'il existe ε positif «petit» devant $B - A$ tel que, en posant
$$M_1 = \sup_{x\in[A,A+\varepsilon]} \left|f^{(4)}(x)\right|, \quad M_2 = \sup_{x\in[A+\varepsilon,B]} \left|f^{(4)}(x)\right|,$$
   alors M_1 est «grand» devant M_2 (voir figure 1 page 2).

   Expliquer de façon qualitative pourquoi dans ce cas une méthode de Simpson utilisant des points uniformément répartis peut-être inutilement coûteuse.

3. Nous allons étudier une méthode d'intégration adaptative, c'est-à-dire
   - les sous-intervalles de $[A, B]$ sont choisis selon la régularité de la fonction à intégrer : ils sont plus nombreux là où la dérivée quatrième de f est la plus importante;
   - mais surtout, ces sous-intervalles s'adaptent automatiquement et cela, sans calculer effectivement la dérivée quatrième de f.

   Pour toute la suite de ce problème, nous considérons $[\alpha, \beta]$ un sous-intervalle quelconque de $[A, B]$. Nous notons
   - $I_f(\alpha, \beta)$ la valeur exacte de l'intégrale de f sur $[\alpha, \beta]$;
   - $S_f(\alpha, \beta)$ la valeur approchée de l'intégrale de f sur $[\alpha, \beta]$, fournie par la méthode de Simpson (vue en question 1a).

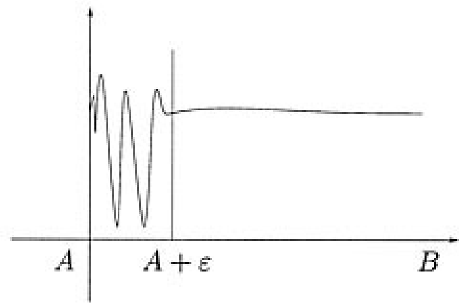

FIG. 1 – Une fonction «oscillante» au voisinage de A.

(a) Exprimer $I_f(\alpha, \beta) - S_f(\alpha, \beta)$ en fonction de $h = (\beta - \alpha)/2$ et de $f^{(4)}$.

(b) On pose

$$S_{f,2}(\alpha, \beta) = S_f\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + S_f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right). \tag{1}$$

Montrer que si

$$f^{(4)} \text{ «ne varie pas trop» sur } [\alpha, \beta], \tag{2}$$

alors il existe $\eta \in]\alpha, \beta[$ tel que

$$I_f(\alpha, \beta) - S_{f,2}(\alpha, \beta) \approx -\frac{h^5}{16}\frac{1}{90}f^{(4)}(\eta). \tag{3}$$

(c) On pose

$$\mathcal{E}_f(\alpha, \beta) = S_f(\alpha, \beta) - S_{f,2}(\alpha, \beta). \tag{4}$$

Sous l'hypothèse (2), calculer $\mathcal{E}_f(\alpha, \beta)$ et déduire de (3) que

$$|I_f(\alpha, \beta) - S_{f,2}(\alpha, \beta)| \approx \frac{1}{15}\left|\mathcal{E}_f(\alpha, \beta)\right|. \tag{5}$$

(d) Si on considère que $S_{f,2}(\alpha, \beta)$ est une approximation de $I_f(\alpha, \beta)$, quel est l'avantage de (5) ?

(e) Si on cherche à obtenir une erreur d'intégration sur $[A, B]$ inférieure à $\varepsilon > 0$, pourquoi est-il suffisant d'avoir sur $[\alpha, \beta]$ une erreur telle que

$$|I_f(\alpha, \beta) - S_{f,2}(\alpha, \beta)| \leq \frac{\beta - \alpha}{B - A}\varepsilon \text{ ?} \tag{6}$$

(f) Montrer que la propriété (6) est vérifiée dès que

$$|\mathcal{E}_f(\alpha, \beta)| \leq 15\frac{\beta - \alpha}{B - A}\varepsilon, \tag{7}$$

la quantité $\mathcal{E}_f(\alpha, \beta)$ étant définie par (4).

Quel est l'avantage du test (7) ?

4. **Cette question est facultative**

L'algorithme d'intégration adaptatif peut être décrit comme suit. On note :

- $[\alpha, \beta]$ l'intervalle d'intégration actif, c'est-à-dire l'intervalle où l'intervalle doit être calculée ;

- $\mathcal{S}$ l'intervalle d'intégration déjà examiné, sur lequel le test d'erreur (7) a été effectué avec succès ;
- $\mathcal{N}$ l'intervalle d'intégration à examiner.

(a) Comment seront initialisés $[\alpha, \beta]$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{N}$?

(b) En cours d'algorithme, on note $J_{\mathcal{S}}(f)$ l'approximation de l'intégrale de f sur $[A, \alpha]$.
Quelles sont les valeurs de α et de $J_{\mathcal{S}}(f)$ au début de l'algorithme ?
Quelle est la valeur de $J_{\mathcal{S}}(f)$ en fin d'algorithme ?

(c) On considère l'algorithme dont chacune des itérations est décrite par :

(i) Si la condition (7) est vérifiée alors :

- $J_{\mathcal{S}}(f)$ est augmenté de $S_{f,2}(\alpha, \beta)$, c'est-à-dire

$$J_{\mathcal{S}}(f) \leftarrow J_{\mathcal{S}}(f) + S_{f,2}(\alpha, \beta).$$

- On exécute

$$\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup [\alpha, \beta]$$

et on pose

$$[\alpha, \beta] = \mathcal{N}, \text{ et } \beta = b.$$

(ii) Si la condition (7) n'est pas vérifiée alors :

- $[\alpha, \beta]$ est divisé par deux et le nouvel intervalle actif est $[\alpha, \alpha']$ avec $\alpha' = (\alpha + \beta)/2$;
- on exécute

$$\mathcal{N} \leftarrow \mathcal{N} \cup [\alpha', \beta], \quad \beta \leftarrow \alpha';$$

- on fournit une nouvelle estimation d'erreur.

Faire un bilan sur cet algorithme en utilisant les questions 4a et 4b.

(d) Comment pourrait-on empêcher l'algorithme de fournir des intervalles d'intégration trop petits ?
Si cela se passe, quelle information peut-on en déduire ?

Exercice 2.

Notations

On rapporte l'espace affine à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'intervalle $I = [1, 5]$ de $\mathbb{R}$.

Soit t le vecteur noeud défini par :

$$t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 1; \quad t_4 = 2 \quad ; t_5 = 4; \quad t_6 = t_7 = t_8 = t_9 = 5.$$

On choisit les points de contrôle distincts $P_0, ..., P_5$ dans le plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

On note (Γ) la spline cubique, ensemble des points $S(t)$ définis par :

$$\overrightarrow{OS(t)} = \sum_{i=0}^{5} B_{i,3}(t)\overrightarrow{OP_i}.$$

1. En utilisant l'algorithme de «de Boor-Cox», mettre en évidence les points de contrôle nécessaires à la détermination de $\overrightarrow{OS(3)}$. Simuler l'algorithme précité et construire géométriquement, en fonction de votre choix de points $P_0, ..., P_5$, le point $S(3)$; on argumentera géométriquement les constructions utilisées.

2. On suppose connue informatiquement la courbe (Γ).

   Déterminer la surface de révolution $(\mathcal{F})$ obtenue en mettant en rotation la courbe (Γ) autour de $\left(O, \overrightarrow{j}\right)$; on fournira en fonction des coordonnées de $S(t)$, celles du point $S'(t, \alpha)$ roté de $S(t)$ d'un angle α dans la rotation précitée.

Exercice 3.

Sous les notations du cours, on considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions φ de classe C^2 sur $[a, b]$ vérifiant les conditions

$$(\mathcal{C}) \qquad \forall i \in \{0, ..., l\} \quad \varphi(\tau_i) = y_i, \quad \varphi'(a) = \alpha, \quad \varphi'(b) = \beta,$$

où l'entier l, les réels $(\tau_i)_{0 \leq i \leq l}$, $(y_i)_{0 \leq i \leq l}$, α et β sont donnés.

On rappelle qu'il existe une unique spline cubique, notée ici f, vérifiant les conditions $(\mathcal{C})$.

1. *Lemme*

   On pose $e = \varphi - f$. En intégrant par partie, montrer que pour tout h de $\mathcal{S}_{1,\tau}$, on a :

$$\int_a^b e''(x)h(x)dx = 0 \ .$$

2. *Pourquoi le terme spline ?*

   Calculer

$$V(\varphi) = \int_a^b \left(\varphi''(x)\right)^2 dx. \tag{8}$$

   En déduire que f est l'unique élément de $\mathcal{E}$ qui minimise l'intégrale $V(\varphi)$ parmi les φ de $\mathcal{E}$.

Remarque 1. Concluons par cette remarque (qui n'est pas une question !) sur le terme employé *spline* en citant un extrait de l'ouvrage suivant (chapitre 6) : Michelle Schatzman. *Analyse numérique, une approche mathématique.* Dunod, Paris, 2001. disponible à la bibliothèque de l'UTBM.

Considérons le problème mécanique suivant : dans le plan, soit une latte (spline en anglais), constituée d'un matériau élastique linéaire et homogène, fixée en des points (de coordonnées $(\tau_i, y_i)_{0\leq i\leq l}$) et dont les extrémités ont une direction imposée. Puisque l'énergie de déformation élastique est l'intégrale du carré de la courbure, on peut écrire, dans un système de coordonnées où la latte déformée est paramétrée par $(t, \varphi(t))$

$$E(\varphi) = \int_a^b \frac{(\varphi''(x))^2}{\left(1 + (\varphi'(x))^2\right)^{5/2}} dx. \tag{9}$$

Par conséquent, l'approximation de (9) à l'ordre le plus bas est l'énergie $V(\varphi)$, définie par (8). Cette approximation n'est valide que quand le gradient de φ est petit.

Le résultat de minimisation démontré dans la question 2 ne fait que traduire le principe de moindre action : parmi toutes les configurations d'équilibre «possibles» (décrit par l'ensemble $\mathcal{E}$), la spline occupera celle qui minimise son énergie de déformation élastique (atteinte pour $f = \varphi$).