

NB: Tout résultat d'une question intermédiaire pourra être admis pour poursuivre la résolution d'un exercice.

## Exercice 1

On se propose dans cet exercice d'étudier diverses formules de quadrature pour approcher le calcul de  $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ , où  $f$  désigne une fonction régulière sur un intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ .

$P_3$  [respect<sup>t</sup>  $P_2$ ] désigne l'espace des fonctions polynômes de degré au plus 3 [respect<sup>t</sup> 2], dont on note  $B_3 = (p_i)_{0 \leq i \leq 3}$  [respect<sup>t</sup>  $B_2 = (p_i)_{0 \leq i \leq 2}$ ] la base canonique avec  $p_i(x) = x^i$ . On rappelle qu'une formule de quadrature est dite exacte si la valeur approchée  $I_a(f)$  de l'intégrale est égale à sa valeur exacte  $I(f)$ .

### 1.1 Etude de $\int_{-h}^h f(x)dx$ pour $h$ donné de $\mathbb{R}^{+*}$

On considère pour l'intervalle  $[-h, h]$ , la formule de quadrature  $(F_1)$  donnée par:

$$(F_1) : \int_{-h}^h f(x)dx \simeq I_{a1}(f)$$

$$\text{avec } I_{a1}(f) = h[c_0 f(-h) + c_1 f(0) + c_2 f(h)]$$

L'objet est de déterminer les coefficients  $c_0, c_1, c_2$  assurant certaines propriétés de la formule  $(F_1)$ .

a) Montrer que la formule  $(F_1)$  de quadrature est exacte pour toute fonction de  $P_2$  ssi elle est exacte pour les trois fonctions de la base  $B_2$ .

b) Montrer que la formule  $(F_1)$  de quadrature est exacte pour toute fonction de  $P_2$  ssi on a:

$$I_{a1}(p_0) = \int_{-h}^h p_0(x)dx; \quad I_{a1}(p_1) = \int_{-h}^h p_1(x)dx; \quad I_{a1}(p_2) = \int_{-h}^h p_2(x)dx.$$

Déterminer les coefficients  $c_0, c_1, c_2$  qui vérifient les conditions antérieures. Interpréter les résultats obtenus.

c) Montrer que, pour les valeurs trouvées des coefficients  $c_0, c_1, c_2$ , la formule  $(F_1)$  est exacte pour tout élément de  $P_3$ . Est-ce étonnant?

.../...

### 1.2 Etude de $\int_0^h f(x)dx$ pour $h$ donné de $\mathbb{R}^{+*}$

On considère pour l'intervalle  $[0, h]$ , la formule de quadrature  $(F_2)$  donnée par:

$$(F_2) : \int_0^h f(x)dx \simeq I_{a2}(f)$$

$$\text{avec } I_{a2}(f) = h[a_0f(0) + a_1f(h)] + h^2[b_0f'(0) + b_1f'(h)].$$

a) Montrer que la formule  $(F_2)$  de quadrature est exacte pour toute fonction de  $P_3$  ssi on a:

$$I_{a2}(p_0) = \int_0^h p_0(x)dx; \quad I_{a2}(p_1) = \int_0^h p_1(x)dx; \quad I_{a2}(p_2) = \int_0^h p_2(x)dx; \quad I_{a2}(p_3) = \int_0^h p_3(x)dx.$$

Déterminer les coefficients  $a_0, a_1, b_0, b_1$  qui vérifient les conditions antérieures.

b) La formule  $(F_2)$  de quadrature est-elle exacte pour une fonction polynôme de degré 4 ?

1.3 Fournir un plan d'étude de l'erreur de méthode commise dans le calcul approché d'intégrales obtenu grâce aux méthodes précédentes. Quels sont les résultats attendus?

## Exercice 2

2.1 Dans le plan affine rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on donne les points  $P_0(0, 1)$ ,  $P_1(1, 4)$ ,  $P_2(2, 1)$  et  $P_3(3, 2)$ .

- Déterminer la courbe de Bézier relative aux points de contrôle  $(P_k)_{0 \leq k \leq 3}$  ;
- l'étudier et fournir sa représentation graphique notée  $(\Gamma)$ , ensemble des points  $M(t) (X(t), Y(t))$ , avec  $t$  élément de  $[0, 1]$ .

2.2 Dans le cadre d'une application industrielle, la courbe  $(\Gamma)$  étudiée ci-dessus représente la section de référence avec un plan donné d'une pièce mécanique, dont on souhaite contrôler la qualité de fabrication.

Pour une pièce quelconque fabriquée, on suppose qu'un système de capteurs couplés à un PC, permet de déterminer via des logiciels connus les coordonnées des points de contrôle  $Q_0(0, y_0)$ ,  $Q_1(1, y_1)$ ,  $Q_2(2, y_2)$  et  $Q_3(3, y_3)$  dont la Bézier associée, notée  $(\gamma)$ , représente la courbe qu'on souhaite comparer à la courbe de référence  $(\Gamma)$ .  $(\gamma)$  est l'ensemble des points  $m(t) (x(t), y(t))$ , avec  $t$  élément de  $[0, 1]$ .

a) En supposant les points  $(Q_k)_{0 \leq k \leq 3}$  connus, sans effectuer les calculs en détail, indiquer comment déterminer  $(\gamma)$ .

b) Outil de mesure de l'écart entre  $(\Gamma)$  et  $(\gamma)$

b1 Montrer que pour tout  $t$  de  $[0, 1]$ , on a:  $x(t) = X(t)$ .

b2 Montrer que la fonction  $F$  définie par:

$$F(y_0, y_1, y_2, y_3) = \int_0^1 [Y(t) - y(t)]^2 dt$$

permet de mesurer l'écart entre  $(\Gamma)$  et  $(\gamma)$ . Que représente  $F(y_0, y_1, y_2, y_3)$ ? Pourquoi choisir cette définition?

c) Détermination de l'écart entre  $(\Gamma)$  et  $(\gamma)$

c1 Pour évaluer  $F(y_0, y_1, y_2, y_3)$ , on se propose d'utiliser une intégration gaussienne à quatre points.

En utilisant les outils développés sous mt44, fournir le plan précis de l'étude qui conduit à l'obtention de  $F(y_0, y_1, y_2, y_3)$ .

c2 Comment intégrer les outils développés précédemment pour décider du rejet d'une pièce défectueuse au sens du critère proposé?