

Examen médian du 13 novembre 2002

Durée : deux heures

Tout document autorisé - Calculatrice autorisée.

On rédigera les deux exercices sur deux copies différentes.

Exercice 1 (Extension de la notion de différences divisées).

Dans cet exercice, on montre qu'il est possible d'étendre la notion de différences divisées ainsi que celle de polynôme interpolateur à un support $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ quelconque.

On étudiera d'abord le cas $n = 1$, ensuite $n = 2$. Pour le cas où n est quelconque, on donnera seulement un plan d'étude.

Soit I un intervalle fermé borné de \mathbb{R} contenant les x_0, x_1, \dots, x_n .

1. On suppose que $n = 1$ pour cette question. Soit F la fonction de I dans $\mathbb{R} : x \mapsto f[x_0, x]$.

(a) Quel est le domaine de définition de F ?

(b) Étude de F au voisinage de x_0 .

Sous quelle hypothèse H_1 portant sur f , F admet-elle une limite en x_0 ? Quelle est cette limite ? On la note $f[x_0, x_0]$; pourquoi ?

On suppose désormais que H_1 est vérifiée dans la suite de cette question.

(c) Montrer que l'on vient de donner un sens à l'expression $f[x_0, x]$ pour tout x de I .

(d) Montrer

$$f[x_0, x] = f[x, x_0].$$

(e) Existence et unicité du polynôme d'interpolation.

(i) Montrer que, pour tout support $\{x_0, x_1\}$, f admet un polynôme d'interpolation p_1 .

(ii) Fournir son expression selon que x_0 est différent de x_1 ou non.

(iii) Quelles sont ses propriétés lorsque $x_0 = x_1$?

(iv) L'unicité de p_1 est-elle assurée ?

2. On suppose $n = 2$ dans cette question.

(a) On considère deux éléments distincts de I , notés x_0 et x_2 . Soit G la fonction de I dans \mathbb{R} :
 $x \mapsto f[x_0, x, x_2]$

(i) Quel est le domaine de définition de G ?

(ii) Étude de G au voisinage de x_0 .

Montrer que sous l'hypothèse H_1 , G admet une limite au voisinage de x_0 . Quelle est-elle ?
 On la note $f[x_0, x_0, x_2]$; pourquoi ?

(iii) Étudier de même G au voisinage de x_2 .

(iv) En déduire qu'on a donné un sens aux expressions $f[x_0, x_0, x_2]$ et $f[x_0, x_2, x_2]$. Montrer que ces expressions peuvent être également obtenues au moyen des relations de récurrence sur les différences divisées vues en cours.

(b) On suppose que f vérifie l'hypothèse H_1 . Soit K de I dans $\mathbb{R} : x \mapsto f[x_0, x_0, x]$.

(i) Quel est le domaine de définition de K ?

(ii) Étude au voisinage de x_0 .

Sous quelle hypothèse H_2 portant sur f , K admet elle une limite en x_0 . Quelle est cette limite ? On la note $f[x_0, x_0, x_0]$; pourquoi ?

(c) Bilan

Fournir une définition générale de $f[x_0, x_1, x_2]$ quel que soit le support.

Montrer que pour toute permutation σ de $\{0, 1, 2\}$, on a

$$f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] = f[x_0, x_1, x_2].$$

(d) Existence et unicité du polynôme d'interpolation.

(i) Montrer que, pour tout support $\{x_0, x_1, x_2\}$, il existe un polynôme d'interpolation p_2 pour f .

(ii) Fournir son expression suivant que les points x_0, x_1 et x_2 sont ou non confondus.

(iii) Quelles sont ses propriétés lorsqu'un point du support est multiple ?

(iv) L'unicité de p_2 est-elle assurée ?

3. Dans cette question, on répondra succinctement et sans preuve.

(a) Au vu des questions 1 et 2, proposer un plan d'étude pour les définitions successives (et dans cet ordre) :

- de la différence divisées généralisée $f[x_0, \dots, x_n]$ pour un support quelconque $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ (on pourra procéder par récurrence) ;
- du polynôme d'interpolation p_n de f sur le support $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$;
- de la notion d'interpolation.

(b) Citer les propriétés du cours relatives au polynôme d'interpolation p_n et des différences divisées $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ qui vous semblent rester valables pour un support quelconque.

Lesquelles vous semblent-elles pouvoir se démontrer de la même façon ?

Exercice 2 (Intégration numérique).

On se propose de calculer numériquement l'intégrale d'une fonction f d'un intervalle fermé borné $[A, B]$ dans \mathbb{R} par une méthode composée (cette méthode n'a pas été vue en cours, mais elle est détaillée ici).

1. Étude de la méthode de Gauss-Legendre à trois points sur $[-1, 1]$.

Dans cette question, g est une fonction de $[-1, 1]$ dans \mathbb{R} de classe C^6 .

- (a) Calculer le polynôme de Legendre L_3 et en déduire les expressions analytiques des points (x_0, x_1, x_2) et des poids (D_0, D_1, D_2) . On pourra utiliser les résultats vus en Travaux Dirigés : si les x_i sont distincts,

$$\begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} & -\frac{x_1 + x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} & \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\ \frac{x_0 x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} & -\frac{x_0 + x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} & \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ \frac{x_0 x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} & -\frac{x_0 + x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} & \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{pmatrix}.$$

- (b) Rappeler l'expression de l'intégrale approchée de g sur $[-1, 1]$ et de l'estimation de l'erreur méthodique commise.

2. Étude de la méthode de Gauss-Legendre à trois points sur $[a, b]$.

Dans cette question, a et b sont deux réels ($a < b$) et f est une fonction de $[a, b]$ dans \mathbb{R} de classe C^6 . Par un changement de variable approprié, montrer en utilisant les résultats de la question 1, que

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^2 f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}\right), \quad (1)$$

avec une erreur

$$E_{\text{méth}} = \alpha(b-a)^7 f^{(6)}(\xi), \quad \xi \in [a, b], \quad (2)$$

où α est une constante numérique à déterminer.

3. Étude d'une méthode composée sur $[A, B]$.

On considère maintenant un «grand» intervalle $[A, B]$ et f une fonction de classe C^6 sur $[A, B]$. On découpe $[A, B]$ en $N \in \mathbb{N}^*$ sous intervalles :

$$h = \frac{B-A}{N} \text{ et, pour tout } i \in \{0, \dots, N\}, a_i = A + ih.$$

Sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, on remplacera l'intégrale exacte de f par l'intégrale approchée issue de la question 2.

- (a) Déterminer la valeur approchée de l'intégrale de f sur $[A, B]$ par cette méthode.
 (b) Montrer que l'erreur méthodique s'écrit :

$$E_{\text{méth}} = \alpha h^7 \sum_{i=0}^N f^{(6)}(\xi_i), \text{ où } \xi_i \in [a_i, a_{i+1}]. \quad (3)$$

Pourquoi peut-on mettre cette erreur sous la forme :

$$E_{\text{méth}} = \alpha h^6 (B - A) f^{(6)}(\xi), \text{ où } \xi \in [A, B] ? \quad (4)$$

- (c) Comparer cette méthode avec la méthode de Simpson, en terme de
- Degré du polynôme d'interpolation sur chaque sous-intervalle $[a_i, a_{i+1}]$;
 - Nombre de calculs ;
 - Erreur (pour ce point, on calculera le gain apporté par cette méthode composée par rapport à celle de Simpson).