

Examen final du 14 janvier 2002

Durée : deux heures

Tout document autorisé - Calculatrice autorisée.

Dans les deux exercices, on peut admettre tout résultat antérieur pour poursuivre.

On rédigera les deux exercices sur deux copies différentes.

**Exercice 1** (Étude du schéma numérique de Gragg).

On étudie, dans cet exercice, la résolution numérique du problème différentiel avec condition de Cauchy

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ \forall t \in [0, T], \quad u'(t) = f(t, u(t)). \end{cases} \quad (1)$$

$u_0$  est un réel donné et  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[0, T] \times \mathbb{R}$  et vérifie l'hypothèse de Lipschitz

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall y, z \in \mathbb{R}, \quad |f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|.$$

Pour cela, on utilise la méthode de Gragg; on considère  $N \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $h = T/N$ ,  $t_n = nh$ , pour  $n \in \{0, \dots, N\}$  et on définit les approximations  $U_n$  de  $u(t_n)$  par

$$\begin{cases} U_0 = u_0, \\ U_1 = u_0 + hf(0, u_0), \\ \forall n \in \{1, \dots, N-1\}, \quad U_{n+1} = U_{n-1} + 2hf(t_n, U_n). \end{cases} \quad (2)$$

On admet que  $u$  est de classe  $C^\infty$  et on considère, pour  $k \in \{2, 3\}$ ,

$$M_k = \max_{t \in [0, T]} |u^{(k)}(t)|.$$

1°) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que, si l'on considère les *erreurs de consistance* définies par

$$\varepsilon_0 = u(t_1) - u(0) - hf(0, u(0)),$$

$$\forall n \in \{1, \dots, N-1\}, \quad \varepsilon_n = u(t_{n+1}) - u(t_{n-1}) - 2hf(t_n, u(t_n)),$$

alors, on a

$$|\varepsilon_0| \leq \frac{h^2}{2} M_2,$$

$$\forall n \in \{1, \dots, N-1\}, \quad |\varepsilon_n| \leq \frac{h^3}{3} M_3.$$

2°) On note l'erreur de convergence définie par

$$\forall n \in \{0, \dots, N\}, \quad v_n = |u(t_n) - U_n|.$$

Montrer que

$$\forall n \in \{1, \dots, N-1\}, \quad v_{n+1} \leq v_{n-1} + 2hLv_n + |\varepsilon_n|. \quad (3)$$

3°) On admet un lemme de Gronwall discret suivant : Si  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}$  sont des réels positifs ou nuls vérifiant

$$\forall n \in \{1, \dots, N-1\}, \quad \theta_{n+1} \leq \theta_{n-1} + 2hL\theta_n + \alpha_n,$$

alors,

$$\forall n \in \{2, \dots, N\}, \quad \theta_n \leq e^{(n-1)hL} \sqrt{\theta_0^2 + \theta_1^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e^{(n-i-1)hL}.$$

Déduire de ce résultat et de (3) que le schéma numérique (2) est convergent d'ordre deux, c'est-à-dire qu'il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $N$ ,

$$\forall n \in \{0, \dots, N\}, \quad |u(t_n) - U_n| \leq Ch^2.$$

On pourra d'abord montrer le résultat intermédiaire suivant

$$\forall n \in \{2, \dots, N\}, \quad v_n \leq \frac{M_2}{2} h^2 e^{TL} + \frac{M_3}{3} h^3 \frac{e^{TL} - 1}{e^{hL} - 1}. \quad (4)$$

4°) Application numérique

On donne  $u_0$  et  $f$  définis par

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ \forall t \in [0, 1], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(t, x) = x - 1. \end{cases} \quad (5)$$

Calculer la solution exacte  $u$  de (1).

5°) Calculer pour  $N = 5$  et  $N = 10$ , les valeurs des solutions approchées  $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$ , définies par le schéma numérique (2).

6°) Déduire des deux questions précédentes les valeurs exactes de

$$w_N = \max_{0 \leq n \leq N} |u(t_n) - U_n|,$$

pour  $N = 5$  et  $N = 10$ . Est-ce conforme aux résultats attendus ?

**Exercice 2.**

La méthode proposée dans cet exercice a été implémentée avec succès en milieu industriel (Peugeot) pour évaluer la période d'un signal périodique, dont on ne connaissait qu'un échantillonnage.

On considère  $a$  un réel quelconque et une fonction  $f$ ,  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant la condition suivante : il existe une constante  $M$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |f^{(n)}(t)| \leq M. \quad (6)$$

1°) Dans cette question, on cherche à évaluer numériquement

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ où } x \in ]a, a + 2[. \quad (7)$$

a)

\* Montrer que l'on peut fournir une valeur approchée de  $A(x)$  par méthode de Gauss-Legendre.

\* Grâce à un changement de variable, fournir l'évaluation conventionnelle de  $A(x)$  qui sera effectivement évaluée par méthode Gaussienne.

b) On se propose de calculer  $A(x)$  à  $\varepsilon$  près ( $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ ) et on souhaite déterminer le nombre de points de support nécessaires. On note  $E_{n+1}$  l'erreur théorique commise.

b1) Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |E_{n+1}| \leq MK^{2n+3} \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3}, \quad (8)$$

où  $K$  est une constante appartenant à  $[0, 1[$ .

b2) On pose

$$u_n = \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3}. \quad (9)$$

\* Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

\* Montrer que cette suite tend vers zéro. Pour cette question, on pourra utiliser la formule de Stirling : quand  $n$  tend vers l'infini,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad (10)$$

b3) En déduire un algorithme *recherche-nbpoints* ( $\varepsilon \rightarrow n_0$ ), qui à partir de  $\varepsilon$  de  $\mathbb{R}_+^*$ , fournit le plus petit entier  $n_0$  tel que

$$|u_{n_0}| \leq \varepsilon. \quad (11)$$

On montrera que cet algorithme fournit toujours une solution.

2°) On considère désormais  $f$  définie par

$$f(t) = \alpha \sin(\omega t + \phi),$$

où les réels  $\alpha$ ,  $\omega$  et  $\phi$  existent mais ne sont pas nécessairement connus explicitement car on travaille en général sur des données discrètes dans les applications ;  $f$  peut représenter, par exemple, un signal (connu sur  $]a, a + 2[$ ).

On note  $T$  la période de  $f$ . On suppose de plus que

$$\omega < 1.$$

a) Montrer que  $f$  vérifie la condition (6).

- b) Montrer que  $T$  est le plus petit réel de  $]a, a + 2[$  tel que  $A(x) = 0$  ( $A$  définie par (7)).
- c) En déduire le plan d'une méthode, utilisant les acquis de MT40 nettement cités, fournissant la valeur de  $T$  de façon approchée.