utbm
université de technologie
Belfort-Montbéliard

MT 26 — Final Automne 04

Jeudi 20 janvier 2005

Matériel autorisé: une feuille aide-mémoire A4 recto

Les deux parties doivent être rédigées sur des copies séparées

I. Première partie (12 points = 4 + 2 + 6)

1°) Déterminer les domaines de convergence et les sommes des séries entières suivantes :

$$S_1(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{(n+1)!} x^n \qquad S_2(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n+2} x^n$$

2°) Déterminer les domaines de convergence des séries entières suivantes (on ne demande pas la somme) :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n+2} \quad z \in C \qquad\qquad S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{4^n} \quad x \in R$$

3°) On considère les équations différentielles (E) $x\,y'' + 2y' + x\,y = 1$ et (E_0) $x\,y'' + 2y' + x\,y = 0$, et on cherche une solution C^∞ et développable en série entière en 0 de (E) sur R.

a) Montrer que y_2 définie sur R_+^* ou sur R_-^* par $y_2 = \dfrac{\cos x}{x}$ est une solution de (E_0).

Pour la suite, on propose différentes méthodes de résolution. Vous traiterez, au choix, une des questions b), c) ou d).

b) Déterminer une solution de (E_0), développable en série entière en 0.

En déduire la solution générale de (E_0) sur les intervalles $I_1 =]0, +\infty[$ ou $I_2 =]-\infty, 0[$.

Déterminer une solution de (E) de la forme $y = x^\alpha$ (avec $\alpha \in R$)

En déduire la solution générale de (E) sur I_1 ou I_2, puis les solutions C^∞ sur R.

c) Calculer les rayons de convergence et les sommes des séries entières

$$S_p = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p} \quad \text{et} \quad S_i = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+2)!} x^{2p+1} .$$

Déterminer les solutions développables en série entière (en 0) de l'équation (E).

d) Choisissez vous-même une autre méthode de résolution.

II. Deuxième partie (12 points = 5 + 3 + 3)

1°) On considère la fonction f, périodique de période T = 2π, définie par : $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{sur } [0, \pi[\\ 0 & \text{sur } [-\pi, 0[\end{cases}$.

a) Représenter graphiquement la fonction f. Calculer les coefficients a_o, a_1 et b_1 du développement de Fourier de f.

b) Calculer les coefficients a_n et b_n du développement de f. Écrire le développement de Fourier de f. La somme de Fourier est-elle égale à la fonction f ?

c) En déduire le calcul de la somme de la série numérique $S = \sum_{p \geq 1} \frac{p^2}{\left(4p^2 - 1\right)^2}$.

2°) Soit la fonction f définie sur R² par $f(x, y) = 2(x - y)^2 - x^4 - y^4$.

a) Montrer que $\forall (x, y) \in R^2 \quad f(x, y) = f(y, x)$

b) En posant y = t x , étudier le signe de f dans un voisinage de (0,0).

c) Étudier l'existence d'un extremum de f sur R².

3°) Soit. ω la forme différentielle définie sur $E = \left(R_+^*\right)^3$ par: $\omega = y^2 z\, dx + 2xyz\, dy - 2xy^2\, dz$.

a) Montrer que ω n'est par une forme différentielle exacte (totale).

b) Déterminer une fonction g dérivable sur R_+^* telle que $g(1) = 1$ et $\psi = \omega.g(z)$ soit une forme différentielle exacte dF.

c) Calculer la fonction F définie sur E telle que $dF = \psi$.

Il faut mettre un frein à l'immobilisme qui mène en courant notre pays au gouffre.

Extrait d'un discours d'un député de la Troisième République devant le Parlement

MT26 20 janvier 2005 (Final A.04) - CORRIGÉ -

PREMIÈRE PARTIE

1°) $S_1(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{(n+1)!}x^n$ rayon de cv R / $\frac{1}{R}=\lim_\infty\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\frac{(n+1)^2}{(n+2)!}\frac{(n+1)!}{n^2}=\lim_\infty\frac{1}{n+2}=0\Rightarrow R=\infty$

$S_1(x)=\sum_0\left(\frac{n^2-1}{(n+1)!}x^n+\frac{x^n}{(n+1)!}\right)=\sum_0\frac{n-1}{n!}x^n+\sum_0\frac{x^n}{(n+1)!}=\sum_1\frac{x^n}{(n-1)!}-\sum_0\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{x}\sum_0\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ si $x\neq 0$

On sait que $\sum_0^\infty\frac{x^n}{n!}=e^x$, donc $\sum_1^\infty\frac{x^n}{(n-1)!}=xe^x$, $\frac{1}{x}\sum_0\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{e^x-1}{x}$ qu'on prolonge par continuité en 0.

Donc $S_1(x)=xe^x-e^x+\frac{e^x-1}{x}$ si $x\neq 0$ et $S(0)=0$

* $S_2(x)=\sum_0\frac{n+1}{n+2}x^n$ R rayon de CV tel que $\frac{1}{R}=\lim_\infty\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1\Rightarrow R=1$

$=\sum\left(1-\frac{1}{n+2}\right)x^n=\sum x^n-\sum_0\frac{x^n}{n+2}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{x^2}\sum_0\frac{x^{n+2}}{n+2}$ si $x\neq 0$

$\sum_1^\infty\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)\Rightarrow\sum_2^\infty\frac{x^{n+2}}{n+2}=-\ln(1-x)-x\Rightarrow S_2(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}$ si $x\neq 0$ $S_2(0)=\frac{1}{2}$

2°) $S_1=\sum_0^\infty\frac{z^n}{n+2}$ R tel que $\frac{1}{R}=\lim_\infty\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1\Rightarrow R=1$

Si z / $|z|=1$ $z=e^{i\theta}$ et $S_1=\sum_0^\infty\left(\frac{\cos\theta n}{n+2}+i\frac{\sin\theta n}{n+2}\right)$ série CV $\forall\theta\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$

Donc S_1 converge sur $\{|z|\leq 1\}\setminus\{1\}$

S_2 : Soit $y=(x+1)^2$, alors $S_2=\sum_0\frac{y^n}{4^n}$ de rayon de CV $R=4$ S_2 div pour $y=\pm 4$

donc S_2 CV $\iff 0\leq y<4\Rightarrow 0\leq(x+1)^2<4\iff -3<x<1$ $D_{S_2}=]-3;+1[$

3°) a) $y=\frac{\cos x}{x}$, $y'=\frac{-\sin x}{x}-\frac{\cos x}{x^2}$, $y''=\frac{2\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}+\frac{2\cos x}{x^3}$

En remplaçant dans (E_0) on trouve 0 donc $y_2=\frac{\cos x}{x}$ est solution de (E_0) sur I_1 ou I_2

b) $y=\sum_0 a_nx^n$ solution de (E_0) $y'=\sum_1 na_nx^{n-1}$ $y''=\sum_2 n(n-1)x^{n-2}$

En remplaçant dans (E_0)

terme en x^0 $2a_1=0$

x^1 $a_2+6a_0=0\Rightarrow a_2=\frac{-1}{6}a_0$

⋮

$n\geq 2$ x^n $a_{n-1}+a_n(n^2+3n+2)=0\Rightarrow a_{n+1}=\frac{-1}{(n+1)(n+2)}a_{n-1}$

donc $\forall n=2p+1$ impair $a_n=0$

catalogue :

$a_2=\frac{-1}{2\times 3}a_0$ $(a_0\neq 0)$

$a_4=\frac{-1}{4\times 5}a_2$

⋮

$\times$ $a_{2p}=\frac{-1}{2p(2p+1)}a_{2p-2}$

$a_{2p}=\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}a_0$

* On cherche une solution ($\neq\tilde{0}$) de (E_0), on peut choisir $a_0=1$

$y=\sum_0\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{2p}=\frac{1}{x}\sum_0\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{2p+1}=\frac{\sin x}{x}$ (prolongement en 0 : $y(0)=1$)

* Solution générale de (E_0) $\boxed{y=\frac{\lambda\sin x+\mu\cos x}{x}\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \text{ sur } I_1 \text{ ou } I_2}$

* Solution particulière de (E_1) $y=x^\alpha\Rightarrow\dots\Rightarrow(\alpha^2+\alpha)x^{\alpha-1}+x^{\alpha+1}=1$ $\forall x\neq 0$ vrai pour $\alpha=-1$

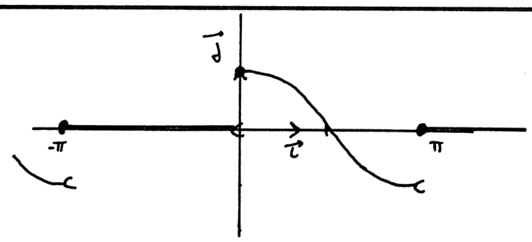
donc $y=\frac{1}{x}\Rightarrow$ Solution générale de (E) $y=\frac{\lambda\sin x+\mu\cos x+1}{x}$ sur I_1 ou I_2

Si on cherche une solution C^∞ sur $\mathbb{R}$, elle doit d'abord avoir une limite finie en 0, ce qui impose $\mu=-1$. On vérifie que :

$$\boxed{\begin{cases}y=\frac{\lambda\sin x+1-\cos x}{x} & \text{si } x\neq 0\\ y(0)=\lambda\end{cases}\quad\text{est solution } C^\infty \text{ de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}}$$

Je n'ai plus de place pour traiter c) ou d). Ce pourrait être une activité d'intersemestre pour vous !

SECONDE PARTIE



1°) a) représentation graphique :

$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \cos x\,dx = 0$

$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}$ $\qquad b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos x \sin x\,dx = 0$

b) $\forall n \geq 2$ $\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos nx \cos x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(\cos(n+1)x + \cos(n-1)x\right)dx = 0$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin nx \cos x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(\sin(n+1)x + \sin(n-1)x\right)dx = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^\pi$

$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n-1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\left((-1)^n+1\right)n}{n^2-1}\right)$ $\quad = 0$ si $n = 2p+1$ impair

$\quad = \frac{2n}{\pi(n^2-1)}$ si $n = 2p$ pair

On a donc $\hat{f}(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{p}{(4p^2-1)}\sin 2px$

f étant discontinue en $x_0 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $f = \hat{f}$ seulement sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]0; k\pi[$

c) L'égalité de Parseval s'écrit $\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f^2(x)\,dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{4\times 2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_1^\infty \frac{p^2}{(4p^2-1)^2}$

Comme $\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}$, on a $\boxed{\sum_1^\infty \frac{p^2}{(4p^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{64}}$

2°) $f(x,y) = 2(x-y)^2 - x^4 - y^4 = f(y,x)$

b) $y = tx$ $\quad f(x,tx) = 2x^2(1-t) - x^4(1+t^4) \Rightarrow$ si $t = 1$ $(y = x)$ $\quad f(x,x) < 0$; si $t \neq 1$ $\quad f(x,y) > 0$

donc f change de signe dans un voisinage de $(0,0)$

c) Extremum défini par $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff \begin{cases} x - y - x^3 = 0 \\ -x + y - y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x^2-2) = 0 \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow$ points possibles $O(0,0)$, $A(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $B(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

* Etude en $(0,0)$: f change de signe $\Rightarrow$ point col (pas d'extremum)
* Etude en A $\quad q(h,k) = -20h^2 - 8hk - 20k^2 = (h\ k)\begin{pmatrix} -20 & -4 \\ -4 & -20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ de valeurs propres $\lambda_1 = -16$, $\lambda_2 = -24$ < 0

donc f a un maximum (local ?) en A

Comme $f(x,y) = f(y,x)$ l'étude est identique en B.

3°) a) $P = y^2 z$ $\quad Q = 2xyz$ $\quad R = -2xy^2$ $\qquad \frac{\partial P}{\partial z} \neq \frac{\partial R}{\partial x} \Rightarrow$ pas une forme différentielle totale.

b) g dérivable sur $\mathbb{R}^*$ $\quad P_1 = y^2 z\, g(z)$ $\quad Q_1 = +2xyz\, g(z)$ $\quad R_1 = -2xy^2 g(z)$

$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}$ vrai $\forall g$ $\qquad \frac{\partial Q_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial y} = 0 \iff z g'(z) = -3g(z) \Rightarrow g(z) = \frac{k}{z^3}$

$\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} = 0 \iff$ - - - - - - - -

Comme $g(1) = 1$ on a $g(z) = \frac{1}{z^3}$ et $\varphi = \frac{y^2}{z^2}dx + \frac{2xy}{z^2}dy - \frac{2xy^2}{z^3}dz$ est totale sur $(\mathbb{R}^*)^3$.

c) Calcul de F ; $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y^2}{z^2} \Rightarrow F = \frac{xy^2}{z^2} + \varphi_1(y,z)$ $\quad \varphi_1$ dérivable sur $\mathbb{R}^{*2}$

$\frac{\partial F}{\partial y} = Q_1 = \frac{2xy}{z^2} = \frac{2xy}{z^2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \Rightarrow \varphi_1 = 0 + \varphi_2(z)$ $\quad \varphi_2$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$\frac{\partial F}{\partial z} = R_1 = -\frac{2xy^2}{z^3} = -\frac{2xy^2}{z^3} + \varphi_2'(z) \Rightarrow \varphi_2'(z) = 0 \Rightarrow \varphi_2(z) = c$

On a donc $dF = \varphi \iff \boxed{F(x,y,z) = \frac{xy^2}{z^2} + c \quad c \in \mathbb{R}}$