

Examen Final MT 11

Durée 2 Heures.

Aucun document - pas de calculette. La notation tiendra compte du soin et de l'écriture

Exercice I (4 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \operatorname{ch} x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$; a et b réels

1°) Calculer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 6 de la fonction f .

2°) Déterminer a et b pour que f soit un infiniment petit d'ordre aussi élevé que possible au voisinage de 0.

Exercice II (5 points)

1°) Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 2 de la fonction ($x \mapsto \sqrt{1+x}$) et le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de la fonction ($x \mapsto \sin x$).

2°) Donner les dérivées des fonctions $f_1 : x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ et $f_2 : x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$. En déduire les développements limités au voisinage de 0 des fonctions f_1 et f_2 .

3°) Sachant que $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\operatorname{Arc} \tan x} - \sqrt{\operatorname{Arc} \sin x}}{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\sin x}}$

Exercice III (5 points)

Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 1}$ et tracer sa courbe représentative. On donnera en particulier les équations des asymptotes, la position de la courbe par rapport aux asymptotes, la concavité et les équations des tangentes aux points d'arrêt.

Exercice IV (6 points)

On considère un \mathbb{R} -espace vectoriel E de base (i, j, k)

1°) Parmi les familles suivantes donner, en justifiant, celles qui sont libres, qui sont génératrices de E , qui forment une base de E .

$$f_1 = \{i, i-j, i+j\}; \quad f_2 = \{i, i-j\}; \quad f_3 = \{i, i+j, j+k\}; \quad f_4 = \{i+j, j+k, i-j+k, i-k\}$$

2°) Parmi les ensembles suivants déterminer les sous espaces vectoriels de E et en donner une base et la dimension.

$$E_1 = \{u \in E / u = xi + yj + zk \text{ et } x - 2y + z = 0\};$$

$$E_2 = \left\{ u \in E / u = xi + yj + zk \text{ et } \begin{cases} x = 2y \\ y = 3z \end{cases} \right\}$$

$$E_3 = \{u \in E / u = xi + yj + zk \text{ et } x + y - z - 1 = 0\}$$

$$E_4 = \{u \in E / u = xi + yj + zk \text{ et } x - y + 2z = 0\}$$

3°) Déterminer une base et la dimension de $E_1 \cap E_2$ et de $E_1 \cap E_4$