le 11 Janvier 2004

UTBM

MT11

Final

Calculatrices interdites

Le seul document autorisé est une page A4 recto-verso rédigée en bleu

Chaque exercice doit être rédigé sur une feuille différente

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 *(question de cours)*

Dans le cours comment a-t-on obtenue la dérivée de arctan *sur* $\mathbb{R}$ *? Quelle est cette dérivée ?*

Utiliser la question précédente pour trouver les primitives de $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+5}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 2 *(NOUVELLE FEUILLE)*

Soit la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}]$ *par*

$$f(x) = \frac{e^x + \ln(1-x) - 1}{\sin(x)^3}.$$

Après avoir rappelé comment obtenir les différents développements limités en 0 des fonctions classiques qui interviennent dans la fonction ci-dessus, donner son prolongement par continuité sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 3 *(NOUVELLE FEUILLE)*

Nous nous intéressons à l'équation (E) $2x.ln(x) = x - 1$ *pour* $x > 0$.

Soit f *la fonction définie sur* $]0, +\infty[$ *par* $f(x) = 2.ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$.

1) Montrer (sans calculatrice) que f *atteint un minimum négatif.*

2) Calculer les limites de $f(x)$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$ *et* x *tend vers 0.*

3) En déduire que (E) possède 2 solutions dont une est inférieure à $\frac{1}{2}$.

TOURNER LA PAGE S.V.P.

Exercice 4 *(NOUVELLE FEUILLE)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$, on définit le polynôme $P_n(X) = X^{n+1} - X^n$.

i) Soit $a \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{P_n(a)}$ admet-elle une limite lorsque n tend vers $+\infty$. Dans les cas où elle existe, déterminer cette limite suivant la valeur de a.

ii) Trouver une racine évidente x_0 de $Q_n(X) = X^n - 1$ et factoriser par $X - x_0$.

iii) Déduire de la question précédente la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle :

$$\frac{X^n + X^{n-1} - 1}{X^{n+1} - X^n}.$$

iv) En déduire la limite (en fonction de a) lorsque n tend vers $+\infty$ de $\frac{a^n+a^{n-1}-1}{a^{n+1}-a^n}$ pour $a > 1$ fixé.