UTBM Printemps 2002

Examen final MT11

Durée : 2 heures
Aucun document – calculatrice non autorisée
Les exercices I, II et III seront rédigés sur une même copie. Les exercices IV et V seront rédigés sur une autre copie.

Exercice I (4 points)

Résoudre sur $\Re$: $x^4+2x^3+x^2-4=0$

En déduire la décomposition en éléments simples sur $\Re$ de $\dfrac{x+1}{x^4+2x^3+x^2-4}$

Exercice II (4 points)

Calculer le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction :

$$g : x \mapsto (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$$

Exercice III (4 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. Déterminer les réels a, b, c tels que $\forall x \in V(\infty)$, f(x) = ax + b + $\dfrac{c}{x}+o(\dfrac{1}{x})$. En déduire l'équation de l'asymptote oblique et la position de la courbe représentative de f, par rapport à cette asymptote.

Exercice IV (4 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto Argth\dfrac{1+3thx}{3+thx}$

1°) Etudier l'ensemble de définition et de dérivabilité. Calculer la dérivée.

2°) Déduire une expression simple de f(x)

Exercice V (4 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par la relation $u_{n+1}=u_n-2u_n^3$ où u_1 est donné tel que $0<u_1<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $0<u_n<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Montrer que la suite (u_n) converge et que sa limite est 0.