le 17 Janvier 2003

UTBM

MT11

Examen final

Automne 2002/2003

chaque partie sera rédigée sur une feuille différente. Les calculatrices sont interdites. Le seul document autorisé est **une feuille recto manuscrite rédigée en bleu.**

Première partie.

Exercice 1 *1) Donner le developpement limité en 0 à l'ordre 5 de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = cos(sin(x^2))$.*

2) En déduire la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x^3\sin(x)}.$$

Exercice 2 *1) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle définie par*

$$R(X) = \frac{X^2+2X+3}{X^2(X+1)(X^2+1)}.$$

2) En déduire les primitives de f définies sur l'intervalle $]0,+\infty[$, où f est la fonction rationnelle définie par $f(x) = R(x)$.

Exercice 3 *Soit f une fonction réelle définie et continue sur le segment $[0,1]$ et telle que $f(0) = f(1) = 0$. On suppose, en outre, que la fonction f est dérivable sur $[0,1[$ et que $f'(0) = 0$.*

On considère la fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} g(0) &= 0 \\ g(x) &= \frac{f(x)}{x} \text{ pour } x \in]0,1] \end{cases}$$

Montrer que la fonction g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe $a \in]0,1[$ tel que $a.f'(a) = f(a)$. Interpréter ce résultat graphiquement.

Deuxième partie.

Exercice 4 *Soit les polynômes :*

$P_1(X) = 1 + \frac{X}{1}$,

$P_2(X) = 1 + \frac{X}{1} + \frac{X(X+1)}{2!}$,

$P_3(X) = 1 + \frac{X}{1} + \frac{X(X+1)}{2!} + \frac{X(X+1)(X+2)}{3!}$

et plus généralement pour $x > 2$

$P_n(X) = 1 + \frac{X}{1} + \frac{X(X+1)}{2!} + \frac{X(X+1)(X+2)}{3!} + ... + \frac{X(X+1)(X+2)...(X+(n-1))}{n!}$.

Factoriser le polynôme P_n *par récurrence.*

Exercice 5 *Soit* n *un entier strictement positif. On considère la fonction* f_n *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\begin{cases} f_n(0) & = 0 \\ f_n(x) & = \arctan(\frac{n}{x}) \text{ pour } x \neq 0 \end{cases}$$

1- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ *fixé, la fonction* f_n *est-elle continue ?*

2- Etudier les variation de f_1, f_2, f_3 *et représenter ces fonctions. On précisera en particulier les limites de* $f_n'(x)$ *lorsque* x *tend vers* o^+ *et quand* x *tend vers* o^-.

3- pour $x \in \mathbb{R}$ **fixé**, *calculer*

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

4- On note f *l'application qui à* x *associe* $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. *Est-elle continue sur* $\mathbb{R}$ *? La représenter.*