université de technologie Belfort-Montbéliard

Date : Jeudi 24 Juin 2004

U.V : MQ 22 Semestre : AUTOMNE ☐ PRINTEMPS ☒

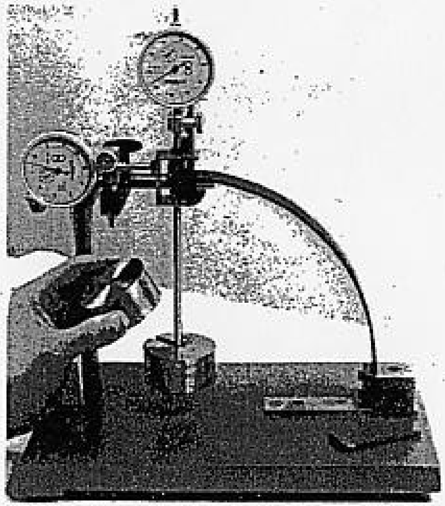
Examen : Médian ☐ Final ☒

NOM : ____________ Prénom : ____________ Né(e) le : ____________

DEPARTEMENT : ____________

NIVEAU : ____________ FILIERE : ____________

Le sujet se compose de 3 exercices totalement indépendants



Signature :

N'omettez pas de signer votre copie

Durée de l'épreuve : 2 heures
Formulaire personnel autorisé
Calculatrice autorisée

Formulaire

Contrainte normale en un point M d'une section droite de centre G.

$$\sigma = \frac{N}{S} - \frac{M_Z}{I_{GZ}} y + \frac{M_Y}{I_{GY}} z$$

avec : $\overrightarrow{GM} = y\vec{Y} + z\vec{Z}$

Energie de déformation emmagasinée par une tranche de poutre d'épaisseur ds

$$U = \int_{poutre} dU$$

avec : $dU = \frac{1}{2E}\left(\frac{N^2}{S} + \frac{M_Z^2}{I_{GZ}} + \frac{M_Y^2}{I_{GY}}\right) ds$

Deuxième formule de Bresse entre deux points N et M

$$\vec{\Delta}_M = \vec{\Delta}_N + \vec{\Omega}_N \wedge \overrightarrow{NM} + \int_{\overline{NM}} d\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}$$

avec $d\vec{\Omega} = \frac{1}{E}\left(\frac{M_Y}{I_{GY}} \vec{Y} + \frac{M_Z}{I_{GZ}} \vec{Z}\right) ds$

Théorème de Castigliano

$$\lambda_P = \frac{\partial U}{\partial F}$$

avec : F appliquée en P

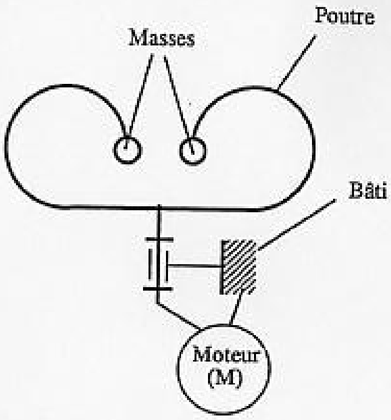
λ_P projection du déplacement du point P suivant F

Théorème de Ménabréa

$$\frac{\partial U}{\partial F} = 0$$

avec : F inconnue hyperstatique

Exercice n°1



On considère le mécanisme représenté ci-contre.

Il est constitué d'une poutre à laquelle sont liées deux masses à chacune de ses extrémités.

Ce mécanisme est entraîné en rotation, à vitesse constante ω, par rapport au bâti au moyen d'un moteur (M).

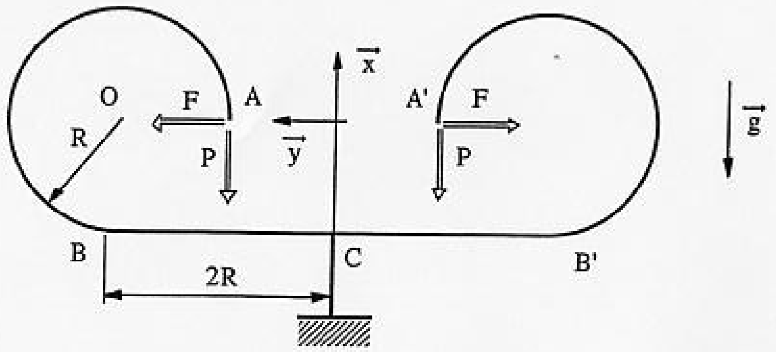
Le modèle retenu pour cette étude est le suivant.

La poutre (ABCB'A') est fixe, en liaison complète avec le bâti en C.
La poutre (ABC) est constituée des parties :
- (AB) de ligne moyenne trois quarts de cercle de centre O de rayon R
- (BC) de ligne moyenne rectiligne de longueur 2R

Les deux masses, de valeur m, en A et en A' sont supposées ponctuelles.

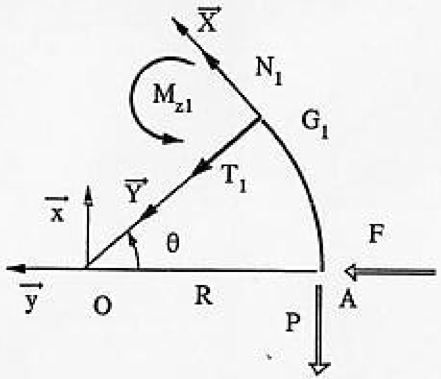
Le poids propre des masses est représentable par une charge concentrée verticale notée P.
La rotation du mécanisme génère pour chacune des masses une force centrifuge représentée par une charge concentrée horizontale notée F.
On rappelle que $F = m\omega^2 R$.

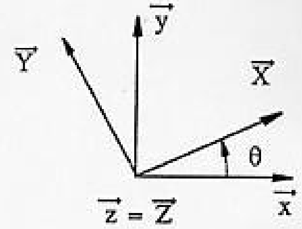
On néglige :
- le poids propre de la poutre devant le chargement représenté par F et P,
- la masse de la poutre devant celle des deux masses en A et en A',
- la variation de rayon pour le calcul de la force F.



1- Déterminer les expressions de l'effort normal N et du moment de flexion M_Z en G (centre de la section droite du profilé).

11- En G_1, avec $(0 \leq \theta \leq 3\pi/2)$.



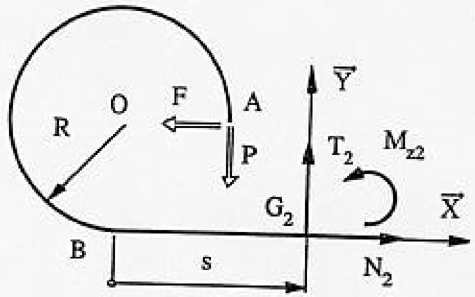


N_1=	2

(en fonction de F et de P)

M_{Z1}=	4

12- En G_2, tel que $\overrightarrow{BG_2} = s\ \overrightarrow{X}$ $(0 \leq s \leq 2R)$.



$N_2=$ 1

(en fonction de F et de P)

$M_{z2}=$ 2

2- Déplacement de la section de centre A.

On se propose d'appliquer la méthode de **Castigliano.**

En déduire les deux composantes Δ_{Ax} et Δ_{Ay} du déplacement de la section de centre A telles que $\overrightarrow{\Delta_A} = \Delta_{Ax}\overrightarrow{x} + \Delta_{Ay}\overrightarrow{y}$

21- Energie de déformation élastique U de la poutre (ABC).

Ecrire, **sans développer le calcul des intégrales,** l'expression de l'énergie de déformation élastique U de la poutre (ABC) calculée en fonction du moment de flexion M_z.
On note EI le module de rigidité à la flexion EI_{Gz} constant de la poutre (ABC).
On gardera les notations F et P.

U = 2

(en fonction de F et de P)

22- Déplacement de la section de centre A suivant la direction de P.
En déduire Δ_{Ax}

(Réponse page suivante)

$\boxed{\Delta_{Ax} =}$ 5

23- Déplacement de la section de centre A suivant la direction de F.
En déduire Δ_{Ay}

$\Delta_{Ay} =$

5

3- Calcul des contraintes.

31- Calculer l'effort normal N_2 (C) et le moment fléchissant M_{z2} (C) dans la section de centre C, section la plus sollicitée. **On explicitera F et P.**

$N_2(C) =$	$M_{z2}(C) =$

1

1

32- Calculer la contrainte normale maximale σ_{max} dans la section de centre C.
La poutre est un tube de diamètre extérieur d_e et d'épaisseur e.

$\sigma_{max} =$

2

(en fonction de S et de I_{GZ})

4- Ecrire la condition de résistance et en déduire la vitesse de rotation ω_{max} maximale du mécanisme.
On note : σ_e la limite élastique à la traction du matériau,
n_e le coefficient de sécurité à la limite élastique.

$\omega_{max} =$

3

5- Application numérique.

On donne :

* $R = 200$ mm, $d_e = 21{,}3$ mm, $e = 2{,}3$ mm, $m = 2$ kg, $g = 9{,}81$ m/s^2 et
$N = 250$ tr/min

* $\sigma_e = 240$ MPa et $E = 210$ GPa

51- Calculer F, P, S et I_{GZ}.

F = N	P = N	1
		1
S = cm^2	I_{GZ}= cm^4	1
		1

52- Calculer les deux composantes Δ_{Ax} et Δ_{Ay} du déplacement de la section de centre A.

Δ_{Ax} = mm	2
Δ_{Ay} = mm	2

53- Calculer la contrainte normale maximale σ_{max} dans la section de centre C.

σ_{max} = Mpa	2

54- Calculer le coefficient de sécurité n_e à la limite élastique du mécanisme.

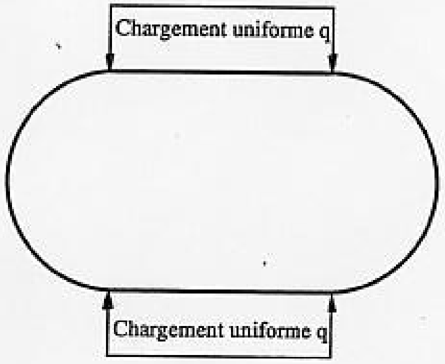
n_e =	1

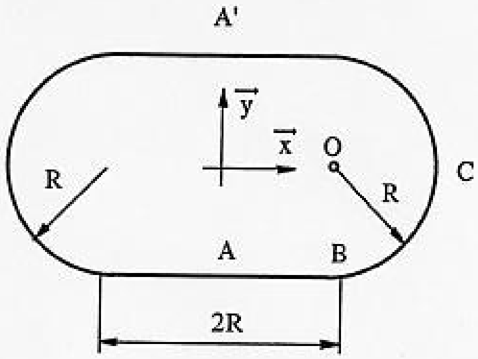
Exercice n°2

On considère l'anneau plan représenté ci-dessous.
Il est constitué d'un poutre continue telle que :
- les parties centrales de ligne moyenne rectiligne de longueur 2R,
- les extrémités de ligne moyenne un demi cercle de rayon R.

Le chargement est représenté par deux répartitions uniformes de charges q appliquées sur les parties rectilignes de l'anneau.

Le poids propre de l'anneau est négligeable devant le chargement appliqué.

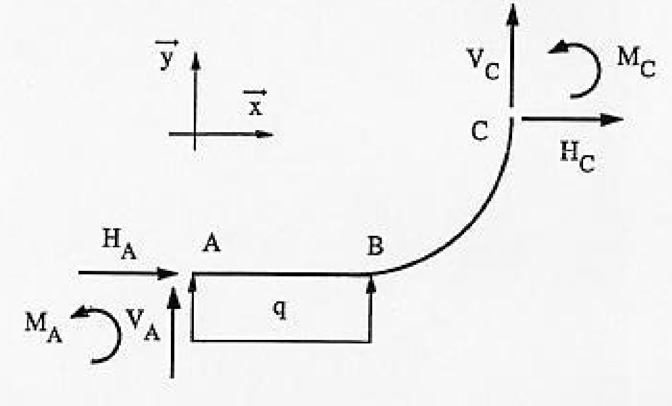




1- Déterminer le degré d'hyperstaticité du problème

Les deux axes de symétrie du problème permettent d'isoler un quart d'anneau (ABC).

11- Déduire des conséquences du théorème des actions mutuelles et des symétries du problème la valeur de deux des composantes des actions de liaison en A et en C.



= 1

= 1

12- Ecrire les trois équations d'équilibre du quart d'anneau (ABC).

= 0 0,5

= 0 0,5

= 0 1

(équation de moment en B)

13- En déduire la valeur des composantes de somme et la relation liant les composantes de moment.

On décide de garder M_A comme **inconnue hyperstatique**

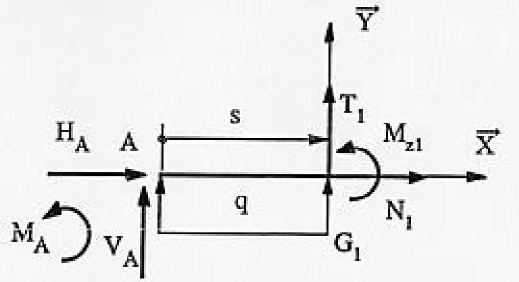
= 0,5

= 0,5

= 0,5

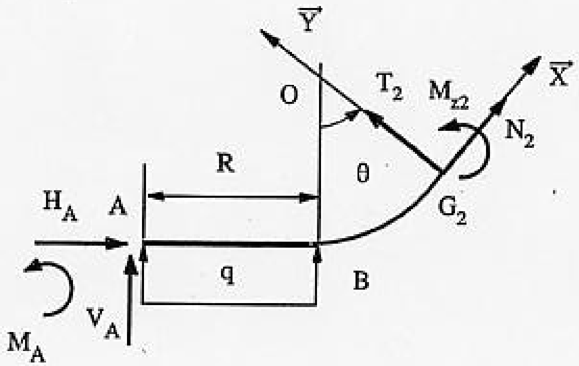
1- Déterminer les expressions du moment de flexion M_Z en G (centre de la section droite du profilé).

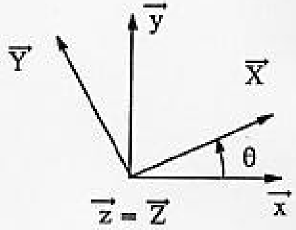
11- En G_1, tel que $\overrightarrow{AG}_1 = s\ \vec{X}$ $(0 \leq s \leq R)$.



$M_{Z1}=$ 2

12- En G_2, avec $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$.





$M_{Z2}=$ 4

3- Calcul de l'énergie de déformation élastique U de l'anneau

31- **Ecrire, sans développer le calcul des intégrales**, l'expression de l'énergie de déformation élastique U_{ABC} du quart d'anneau (ABC) calculée en fonction du moment de flexion M_Z.
On note **EI le module de rigidité à la flexion** EI_{Gz} constant de l'anneau.

$U_{ABC} =$

2

32- En déduire l'expression de l'expression de l'énergie de déformation U de l'anneau.

U =

0,5

4- Valeur de l'inconnue hyperstatique M_A.

Théorème utilisé :

Expression :

0,5

Inconnue hyperstatique M_A :

0,5

(Valeur exacte)

$M_A =$

(Valeur approchée)

$M_A =$

3

0,5

5- Variation de la distance $\Delta_{AA'}$ des points A et A'.

51- Rappeler les expressions du moment fléchissant M_z

On notera : $M_A = \alpha\, qR^2$

$M_{z1} =$ 1

$M_{z2} =$ 1

52- Calculer le déplacement Δ_A de la section de centre A par la formule de Bresse

Appliquer la 2° formule de Bresse (déplacements) entre les points A et C.
En déduire le déplacement Δ_{Ay} du point A dans la direction $\vec{y}$.

(Réponse page suivante)

(En fonction de α)

$\Delta_{Ay} =$

(On remplaçant α)

$\Delta_{Ay} =$ 4 1

53- En déduire la valeur de $\Delta_{AA'}$ en fonction de Δ_{Ay}

$\Delta_{AA'} =$ 0,5

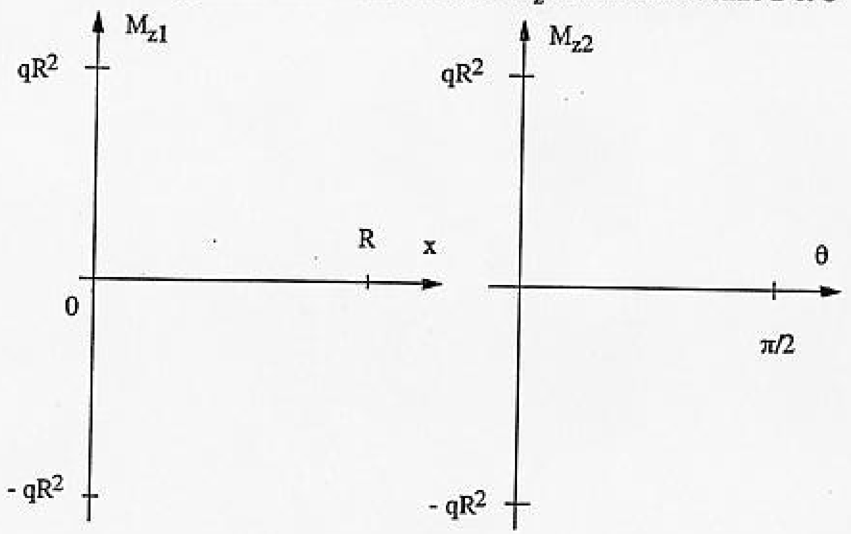
6- Application numérique.

On donne : $E = 2{,}1.10^{11}$ Pa, $I_{Gz} = 23{,}33$ mm^4 , q =3500 N/m et R = 30 mm

$\Delta_{AA'} =$ mm

1

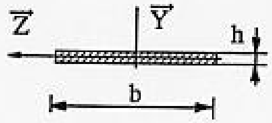
7- Tracer le diagramme du moment de flexion M_z entre A et B et entre B et C



1

1

8- Calculer la contrainte normale maximale σ_{max}.
On donne : la section rectangulaire de l'anneau a pour largeur b = 35 mm et pour hauteur h = 2 mm.



$\sigma_{max} =$ MPa

1

Exercice n°3

Détermination du module d'élasticité longitudinale E ou module d'Young d'un matériau. Influence de l'appareil de mesure sur la précision du résultat.

Pour déterminer expérimentalement le module d'élasticité longitudinale d'un matériau, on effectue un essai de flexion.

L'éprouvette est une poutre rectiligne (ABCB'A').

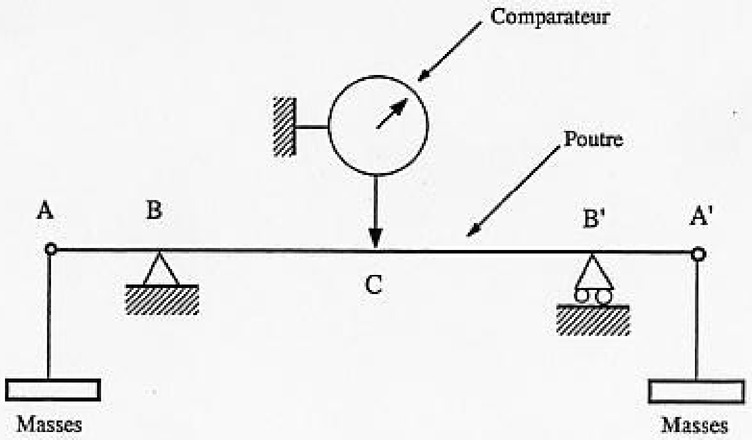
Elle repose sur le bâti supposé indéformable par une articulation en B et un appui simple en B'.

Le chargement est appliqué aux extrémités A et A' de la poutre au moyen de nacelles et de masses marquées..

On mesure la flèche au milieu C de la poutre au moyen d'un comparateur en liaison complète avec le bâti.

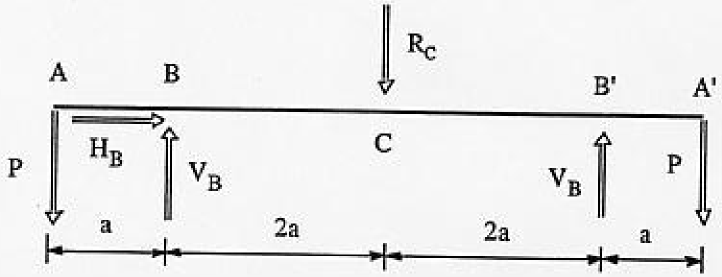
Le poussoir et la touche du comparateur sont rappelés par un ressort. De ce fait lorsque la touche est en contact avec la poutre elle exerce un effort proportionnel à l'enfoncement de celle-ci par rapport au boitier du comparateur.

On se propose de déterminer l'influence de cet effort sur la précision de la valeur expérimentale du module d'Young E.



L'action de contact de la touche du comparateur est représentée par une charge concentrée R_C apliquée au milieu de la poutre. L'intensité de cet effort est proportionnelle à l'enfoncement de la touche c'est à dire à la flèche au milieu de la poutre.
Cette flèche faisant partie des inconnues de l'étude, l'intensité de R_C est donc inconnue à ce stade de l'étude.

1- Déterminer les actions de liaison en B et en B'.
Remarque : On prend en compte la symétrie du problème suivant l'axe vertical passant par C.



1

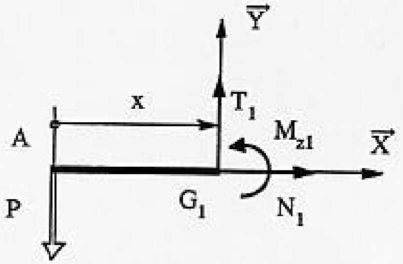
$H_B=$ 1

$R_C=$

(en fonction de P et de V_B)

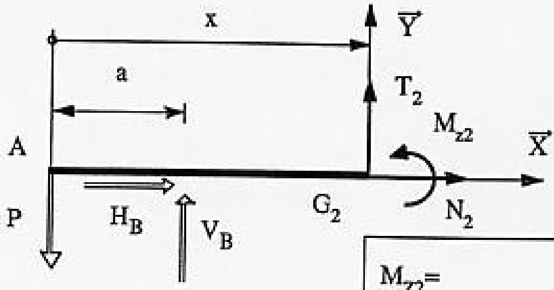
2- Déterminer l'expression du moment de flexion M_z en G (centre de la section droite du profilé) :

11- En G_1, tel que $\overrightarrow{AG}_1 = x\,\overrightarrow{X}$ $(0 \le x \le a)$



$M_{z1}=$ 1

12- En G_2, tel que $\overrightarrow{AG}_2 = x\,\overrightarrow{X}$ $(a \le x \le 3a)$



$M_{z2}=$ 2

3- Déformée de la ligne moyenne de la poutre.

31- Déterminer l'équation de la déformée de la ligne moyenne de la poutre $y_1(x)$ dans le repère $[A, (\vec{x}, \vec{y})]$ entre A et B. On notera C_1 et C_2 les deux constantes d'intégration.

$EI_{Gz}\, y_1(x) =$ 2

32- Déterminer l'équation de la déformée de la ligne moyenne de la poutre $y_2(x)$ dans le repère $[A, (\vec{x}, \vec{y})]$ entre B et C. On notera C_3 et C_4 les deux constantes d'intégration.

$EI_{Gz}\, y_2(x) =$ 2

33- Conditions aux limites.
Indiquer le point et la condition à la limite :

2
2
2
2

(au point) (C.L.) (au point) (C.L.)

34- A l'aide des conditions aux limites, déterminer les constantes C_1,C_2, C_3 et C_4

C_3=	C_1=	2
		1
C_2=	C_4=	2
		1

35- En déduire l'expression de la flèche f_C en C de la poutre.

f_C = 　 2

4- Détermination du module d'Young E du matériau

41- On néglige l'influence de l'effort du comparateur sur la poutre.

411- Valeurs de R_C et V_B suivant cette hypothèse

R_C =	V_B =	2
		1

412- Déterminer l'expression de la flèche f_{C0}

f_{C0} = 　 2

413- En déduire l'expression du module d'Young E.

E = 　 1

42- On prend en compte l'influence de l'effort du comparateur sur la poutre.

La flèche mesurée par le comparateur permet alors de calculer R_C.

Donner l'expression du module d'Young E à partir de l'expression de la flèche f_C calculée à la question 32.

E = 　 2

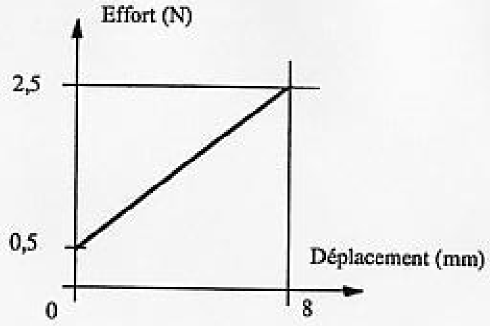
43- Application numérique :

On donne : $a = 100$ mm, $P = 150$ N, $I_{Gz} = 360$ mm^4

La courbe de tarage du comparateur est représentée ci-contre.

Le poussoir et la touche du comparateur étant en position "sortie" le ressort exerce un effort de 0,50 N.

Le déplacement de l'aiguille du comparateur est lié à l'effort du ressort par la loi linéaire donnée par la courbe.



La flèche, mesurée au milieu de la poutre, est donnée par un comparateur gradué au 1/100 mm.
Lorsqu'aucune charge P n'est appliquée à la poutre, l'aiguille du comparateur indique 2,00 mm.
Lorsque deux charges P égales à 150 N sont placées aux extrémités de la poutre, l'aiguille du comparateur indique 6,00 mm.

431- Calculer la valeur du module d'Young E quand on néglige l'influence du comparateur

E = MPa | 2

432- Calculer la valeur du module d'Young E quand on prend en compte l'influence de l'effort du comparateur.

*) Déterminer la valeur de l'effort R_C exercé par la touche du comparateur sur la poutre

$R_C =$ N | 2

**) Calculer la valeur du module d'Young E

E = MPa | 2