



U.V : MQ 22 Semestre : AUTOMNE PRINTEMPS

Examen : Médián Final (cocher la case utile)

NOM : _____ Prénom : _____ Né(e) le : _____

DEPARTEMENT : T.C. G.I. G.M. (cocher la case utile)

NIVEAU : _____ FILIERE : _____

Le sujet se compose de 4 exercices totalement indépendants.

Les thèmes abordés sont :

Exercice n°1 : Effort normal (durée conseillée : 20 min)

Exercice n°2 : Effort normal et moment fléchissant (durée conseillée : 30 min)

Exercice n°3 : Moment fléchissant (durée conseillée : 20 min)

Exercice n°4 : Moment fléchissant et moment de torsion (durée conseillée : 50 min)

Signature :

N'omettez pas
de signer votre copie

Durée de l'épreuve : 2 heures
Aucun document autorisé.
Calculatrice autorisée.

Exercice n°1 (9 points)

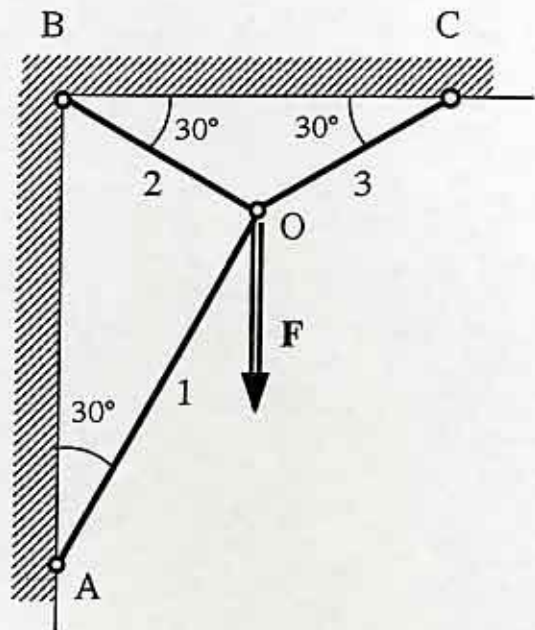
On considère le treillis plan hyperstatique parfaitement articulé représenté ci-dessous. Son poids propre est négligeable devant le chargement appliqué. Toutes les barres ont la même rigidité (ES). Les barres OB et OC ont pour longueur L .

On note N_i les efforts normaux dans les barres avec $N_i > 0$ (traction) et $N_i < 0$ (compression).

Formulaire

Energie de déformation d'une barre

$$U_i = \frac{N_i^2 l_i}{2ES}$$



1- Représenter les actions des barres sur le noeud O et écrire les équations d'équilibre de ce noeud :

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

0,5

0,5

0,5

2- Donner l'expression des efforts N_1 et N_2 en fonction de l'effort N_3 et de F

$N_1 =$

$N_2 =$

0,5

0,5

3- Longueur de la barre 1

$L_1 = L$

4- Energie de déformation élastique U

41- Expression de U en fonction des N_i

$$U = \frac{L}{2ES} [\quad]$$

0,5

42- Expression de U en fonction de F et de N_3

$$U = \frac{L}{8ES} [\quad N_3^2 + \quad FN_3 + \quad F^2]$$

1,5

5- Valeur de l'inconnue hyperstatique N_3 .

Théorème utilisé :

Expression :

Inconnue hyperstatique N_3 :

0,25

$$N_3 = \quad F$$

0,25

0,5

6- Valeur des efforts N_1 et N_2

$$N_1 = \quad F$$

$$N_2 = \quad F$$

0,5

0,5

7- Flèche verticale v_O en O du treillis

Théorème utilisé :

Expression :

0,25

0,25

Expression de U en fonction de F

$$U =$$

1

Flèche verticale v_O

$$v_O =$$

0,25

8- Valeur numérique de v_O sachant que les barres sont des tubes de section circulaire, de diamètre extérieur D_e et d'épaisseur e.

Avec : $L = 2$ m, $D_e = 54$ mm, $e = 2,6$ mm, $E = 210$ GPa et $F = 10$ kN

$$v_O = \quad \text{mm}$$

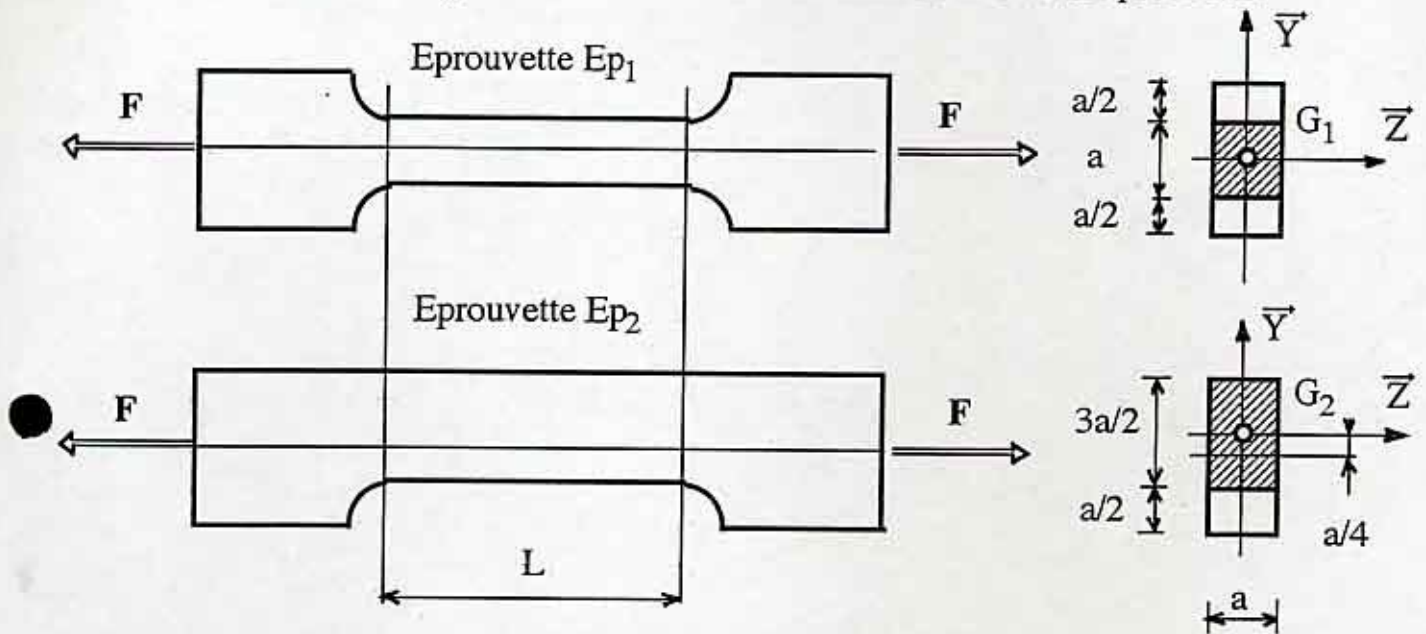
0,75

Exercice n° 2 (13 points)

On considère deux éprouvettes Ep_i ($i = 1, 2$) représentées ci-dessous, sollicitées par un même effort axial F .

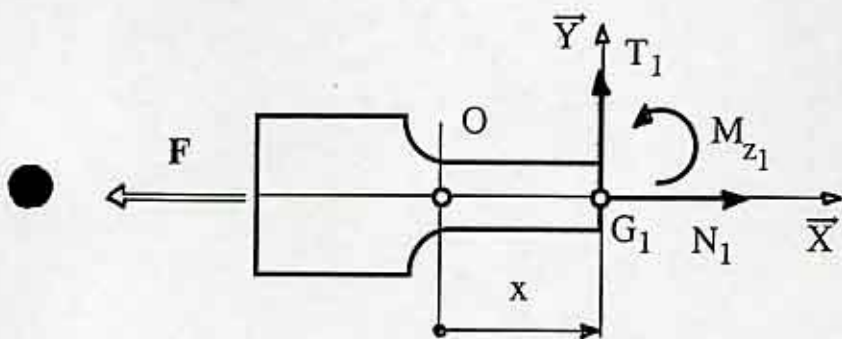
On notera :

- * S_i l'aire de la section de l'éprouvette Ep_i
- * I_{GZ_i} le moment quadratique suivant l'axe (G_i, \bar{Z}) de la section de l'éprouvette Ep_i
- * L la longueur commune de chacune des deux éprouvettes
- * E le module d'Young commun du matériau de chacune des deux éprouvettes



1- Déterminer les éléments de réduction du torseur des forces de cohésion dans une coupure de centre G_i telle que : $\overrightarrow{OG_i} = x \bar{X}$ ($0 \leq x \leq L$)

11- Eprouvette Ep_1

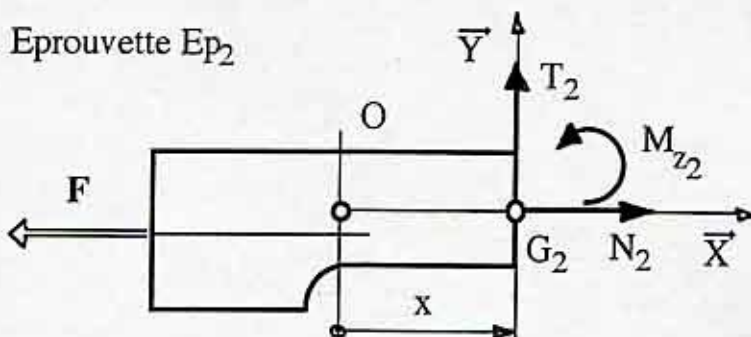


$N_1 =$		0,5
---------	--	-----

$T_1 =$		0,5
---------	--	-----

$M_{z_1} =$		0,5
-------------	--	-----

12- Eprouvette Ep_2



$N_2 =$		0,5
---------	--	-----

$T_2 =$		0,5
---------	--	-----

$M_{z_2} =$		0,5
-------------	--	-----

2- Etude de la contrainte normale en un point M de la section droite de chacune des deux éprouvettes

On notera $\vec{GM} = y \vec{Y} + z \vec{Z}$

21- Eprouvette Ep₁

Calculer S₁

$$S_1 =$$

0,5

Expression de σ_1

$$\sigma_1 =$$

0,5

En déduire les valeurs de $\sigma_{\max 1}$ et de $\sigma_{\min 1}$

$$\sigma_{\max 1} =$$

$$\sigma_{\min 1} =$$

0,5

0,25

22- Eprouvette Ep₂

Calculer S₂ et I_{Gz₂}

$$S_2 =$$

$$I_{Gz_2} =$$

0,5

0,5

Expression de σ_2 (en fonction de N₂ et de M_{Z₂})

$$\sigma_2 =$$

0,5

En déduire les valeurs de $\sigma_{\max 2}$ et de $\sigma_{\min 2}$

$$\sigma_{\max 2} =$$

$$\sigma_{\min 2} =$$

0,5

0,5

23- Conclusion : La contrainte est la plus faible dans l'éprouvette

E _{p1}	E _{p2}
-----------------	-----------------

0,25

3- Etude de l'allongement ΔL de la longueur L des éprouvettes

31- Calculer l'énergie de déformation élastique U_i emmagasinée par chacune des deux éprouvettes

- Calculer U_1

$U_1 =$

1

(en fonction de F , E , a et L)

- Calculer U_2 (en fonction de N_2 et de M_{Z_2})

$U_2 =$

1

(en fonction de F , E , a et L)

32- En déduire l'allongement ΔL de la longueur L des éprouvettes

- Théorème utilisé

--

0,25

- Allongement ΔL_1

$\Delta L_1 =$

0,25

- Allongement ΔL_2

$\Delta L_2 =$

0,25

33- Conclusion : L'allongement est le plus grand dans l'éprouvette

E_{p1}	E_{p2}
----------	----------

0,25

- 4- Sachant que la poutre est en acier de module d'Young $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa, qu'elle supporte une charge $F = 10^4$ N que la longueur $L = 0,2$ m et que $a = 10$ mm calculer

41- Les caractéristiques des sections des éprouvettes

$S_1 =$	mm ²	$S_2 =$	mm ²	0,25
				0,25
		$I_{Gz_2} =$	mm ⁴	0,25

42- Les contraintes normales maxi et mini

$\sigma_{\text{maxi}_1} =$	MPa	$\sigma_{\text{maxi}_2} =$	MPa	0,25
				0,25
$\sigma_{\text{mini}_1} =$	MPa	$\sigma_{\text{mini}_2} =$	MPa	0,25

43- L'énergie de déformation élastique U

$U_1 =$	Joules	0,25
$U_2 =$	Joules	0,25

44- L'allongement ΔL des éprouvettes

$\Delta L_1 =$	mm	0,25
$\Delta L_2 =$	mm	0,25

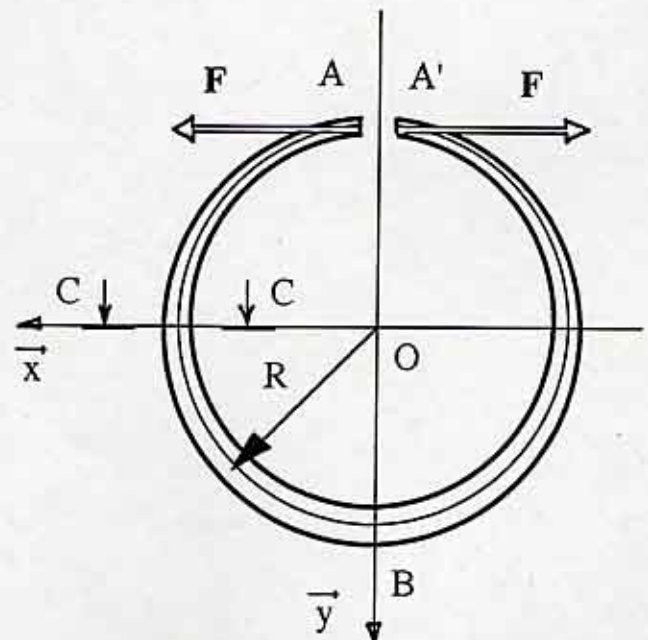
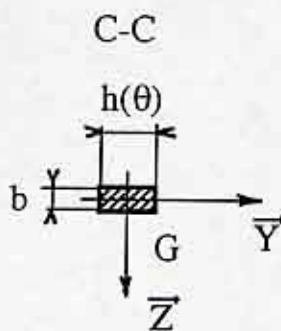
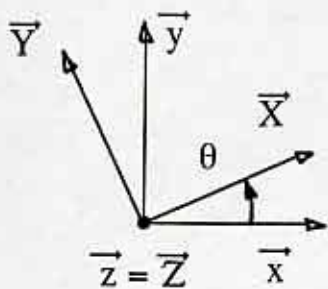
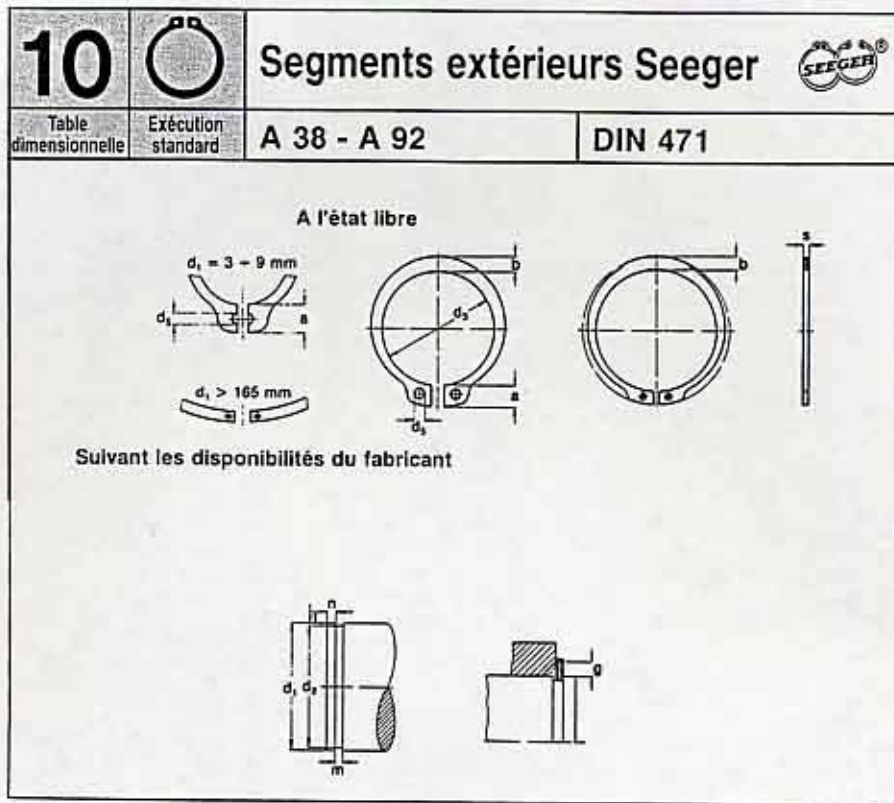
Exercice n° 3 (6 points)

Le circlips est utilisé en construction pour réaliser des arrêts axiaux.

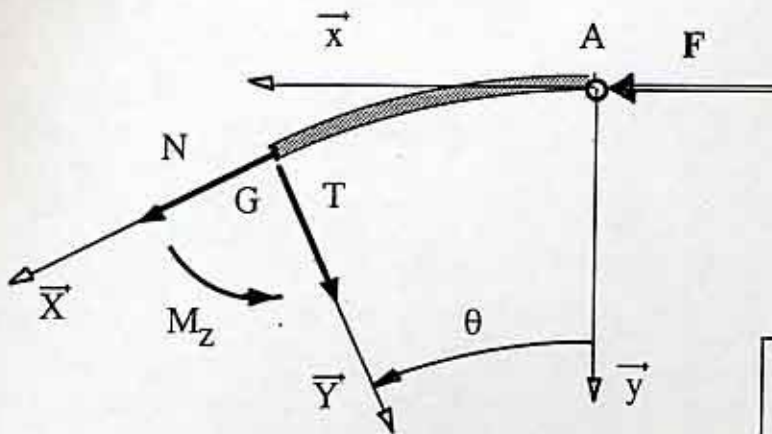
On modélise celui-ci par une poutre plane (ABA') de fibre moyenne circulaire de rayon R . Sa section est de forme rectangulaire, d'épaisseur b et de hauteur h variable.

Lors de son installation, on écarte à l'aide d'une pince à becs, les extrémités du circlips pour le déplacer sur l'arbre jusqu'à la rainure dans laquelle il est installé.

On se propose de déterminer la relation entre l'effort F appliqué et l'écartement des extrémités du circlips.



- 1- Déterminer le moment résultant en G du torseur des forces de cohésion dans une section droite quelconque de centre G ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).
On isole pour cela le tronçon AG.



$$M_z = \quad \quad \quad 1$$

- 2- Ecrire l'expression de l'énergie de déformation élastique de la poutre calculée en fonction du moment de flexion M_z .

- 21- Expression du moment quadratique I_{GZ} de la section droite de la poutre suivant l'axe (G, \bar{Z})

$$I_{GZ} = \quad \quad \quad 0,5$$

(en fonction de $h(\theta)$ et de b)

- 22- Expression de l'énergie de déformation élastique de la poutre U

On exprimera cette énergie sous la forme $U = AI_1$, où I_1 est une intégrale d'une fonction de θ .

$$U = \left[\quad \quad \quad \right] \int_0^{2\pi} \quad \quad \quad d\theta \quad \quad \quad 1$$

A

I_1

3- Déplacement δ des points A et A' dans la direction \vec{x} .

31- Calculer δ par le théorème de Castigliano

$$\delta =$$

1

32- Calculer δ par les formules de Bresse

321-En appliquant la formule de Bresse des déplacements entre les points A et B, en projection sur \vec{x} , donner l'expression de la composante ΔA_x de $\vec{\Delta A}$.

$$\Delta A_x =$$

2

322-En déduire l'expression de δ en fonction de ΔA_x

$$\delta =$$

0,5

Exercice n° 4 (12 points)

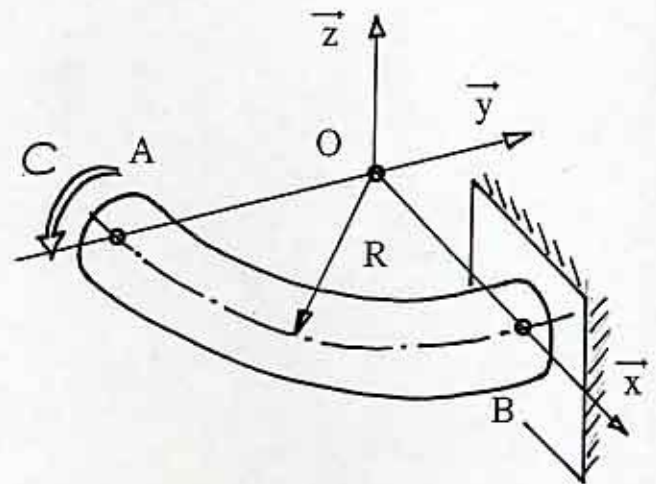
On considère la poutre AB parfaitement encadrée en B et libre en A.

Sa fibre moyenne est un arc de cercle de rayon R.

Cette poutre est un **tube mince** ($e \ll r$) de section circulaire telle que :

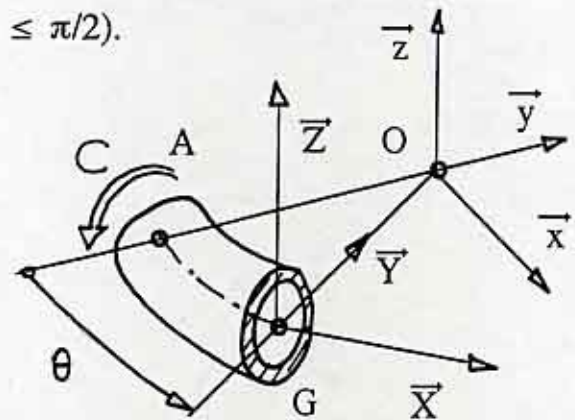
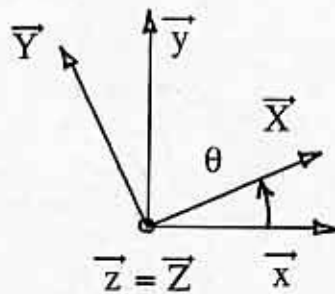
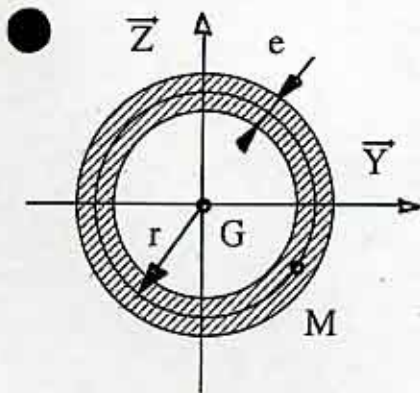
- r : le rayon de la ligne moyenne de la section
- e : l'épaisseur .

Elle supporte un couple $\vec{C} = C \vec{x}$ appliqué à son extrémité libre A.



- 1- Déterminer le moment résultant en G du torseur des forces de cohésion dans une section droite quelconque de centre G ($0 \leq \theta \leq \pi/2$).

On isole pour cela le tronçon AG.



$M_T =$	$M_Y =$	$M_Z =$
---------	---------	---------

- 0,5
- 0,5
- 0,5

- 2- En un point M de la ligne moyenne d'une section quelconque de centre G, la contrainte totale arithmétique maximale a pour composantes :

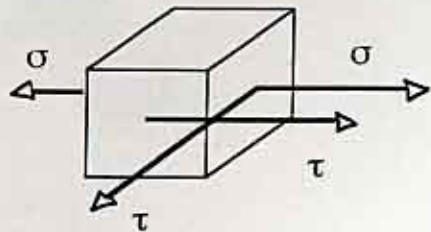
- une contrainte normale arithmétique maximale σ due à la flexion telle que :

$\sigma = \frac{M_Y r}{I_{G_Y}}$	avec	$I_{G_Y} =$	d'où	$\sigma =$	0,5
					0,5
(en fonction de e et de r)					

- une contrainte de cisaillement arithmétique τ due à la torsion telle que :

$\tau = \frac{ M_t }{2eA}$	avec	$A =$	d'où	$\tau =$	0,5
					0,5

21- Ecrire le critère de Von-Misès dans le cas étudié.



Représentation de l'état plan des contraintes en M

Matrice des contraintes en M (en fonction de σ et de τ)

$$\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

0,5

Expressions (en fonction de σ et de τ) des valeurs propres σ_1 et σ_2 de la matrice des contraintes en M (soit les contraintes principales en M)

$\sigma_1 =$

$\sigma_2 =$

$\sigma_3 = 0$

0,5

0,5

● Contrainte équivalente σ_{equi} calculée à l'aide du critère de Von-Misès

$$\sigma_{equi} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} =$$

0,5

(en fonction de σ et de τ)

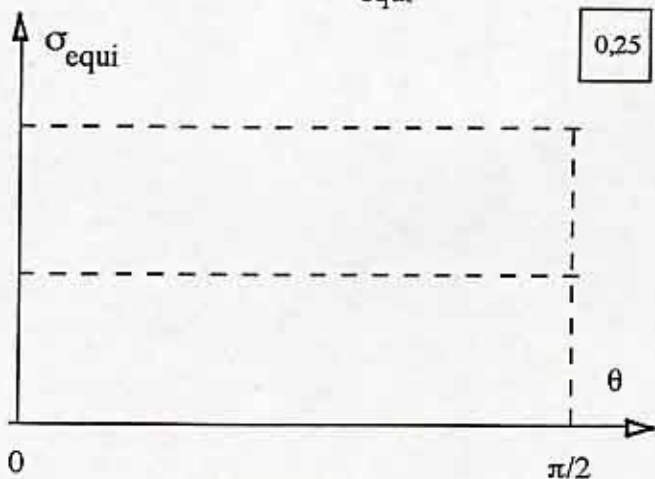
22- Déterminer la section la plus dangereuse de la poutre

En remplaçant σ et τ dans l'expression de la contrainte équivalente σ_{equi} , on trouve :

$$\sigma_{equi} = \frac{C}{2\pi e r^2} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta}$$

0,25

Tracer la fonction $\sigma_{equi} = f(\theta)$



Conclusion :

Section la plus dangereuse en : pour $\theta =$ 0,25

Soit une contrainte équivalente maxi :

$$\sigma_{equi} =$$

$$MAX$$
 0,5

3- Calculer la rotation $\bar{\Omega}_A$ de la section de centre A en appliquant la première formule de Bresse entre les points A et B

On notera : $\bar{\Omega}_A = \Omega_{Ax} \bar{x} + \Omega_{Ay} \bar{y}$

31- Rappeler l'expression de $d\bar{\Omega}$

$d\bar{\Omega} =$	$\bar{X} +$	\bar{Y}
-------------------	-------------	-----------

32- Calculer $\bar{\Omega}_A$

(réponse page suivante)

$$\Omega_{Ax} =$$

$$\Omega_{Ay} =$$

2

2

(en fonction de C, R, e, r, E et G)

4- On donne $R = 10 \text{ cm}$, $r = 1 \text{ cm}$, $e = 1 \text{ mm}$, $\sigma_e = 240 \text{ MPa}$ (limite élastique de traction du matériau), $E = 210 \text{ GPa}$ (module d'Young du matériau), $G = 80,8 \text{ GPa}$ (module de Coulomb) et $n_e = 2$ (coefficient de sécurité par rapport à la limite élastique)

41- Sachant que la contrainte équivalente maximale (calculée question 22) est égale à :

$$\sigma_{\text{equi MAX}} = \frac{C}{\pi e r^2}$$

Déterminer le couple maximal admissible C_{max} que l'on peut appliquer en A

$$C_{\text{max}} = \quad \text{Nm}$$

0,5

42- Déterminer les composantes de la rotation $\vec{\Omega}_A$ de la section de centre A

$$\Omega_{Ax} = \quad ^\circ$$

$$\Omega_{Ay} = \quad ^\circ$$

0,5

0,5