

# BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

SPECIALITES	COEF.	DUREE
ELECTROTECHNIQUE	1	3
GENIE OPTIQUE	3	3
TECHNIQUES PHYSIQUES POUR L'INDUSTRIE ET LE LABORATOIRE	3	3

## MATHEMATIQUES

Le sujet comprend 4 pages, numérotées de 1 à 4 .  
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.  
Il comprend 7 pages, numérotées de 1 à 7.

*La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.*

**Code sujet :  
MATGRA2**

**Exercice 1 (11 points)**

**Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes.**

**Partie A**

Une entreprise produit, en grande quantité, des appareils. Chaque appareil fabriqué peut présenter deux défauts que l'on appellera défaut  $a$  et défaut  $b$ .

On prélève un appareil au hasard dans la production d'une journée.

On note  $A$  l'événement : « l'appareil présente le défaut  $a$  » et  $B$  l'événement : « l'appareil présente le défaut  $b$  ».

Les probabilités des événements  $A$  et  $B$  sont :  $P(A) = 0,03$  et  $P(B) = 0,02$  ; on suppose que ces deux événements sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'événement  $E_1$  : « l'appareil présente le défaut  $a$  et le défaut  $b$  ».
2. Calculer la probabilité de l'événement  $E_2$  : « l'appareil est défectueux, c'est-à-dire qu'il présente au moins un des deux défauts ».
3. Calculer la probabilité de l'événement  $E_3$  : « l'appareil ne présente aucun défaut ».
4. Sachant que l'appareil est défectueux, quelle est la probabilité qu'il présente les deux défauts ?  
*Le résultat sera arrondi au millième.*

**Dans les parties B et C, les résultats sont à arrondir au centième.**

**Partie B**

Les appareils sont conditionnés par lots de 100 pour l'expédition aux distributeurs de pièces détachées. On prélève au hasard un échantillon de 100 appareils dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 appareils. Pour cette partie, on considère que, à chaque prélèvement, la probabilité que l'appareil prélevé soit défectueux est 0,05.

On considère la variable aléatoire  $X_1$  qui, à tout prélèvement de 100 appareils, associe le nombre d'appareils défectueux.

1. a) Justifier que la variable aléatoire  $X_1$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.  
b) Donner l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X_1$ .
2. On suppose que l'on peut approcher la loi de  $X_1$  par une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .  
a) On choisit  $\lambda = 5$  ; justifier ce choix.  
b) En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux appareils défectueux dans un lot.

**Partie C**

Les appareils sont aussi conditionnés par lots de 800 pour l'expédition aux usines de montage. On prélève au hasard un lot de 800 appareils. On considère la variable aléatoire  $X_2$  qui, à tout prélèvement de 800 appareils, associe le nombre d'appareils défectueux. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire  $X_2$  par la loi normale de moyenne 40 et d'écart type 6,2.

1. Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus 50 appareils défectueux dans le lot.
2. Déterminer le réel  $x$  tel que  $P(X_2 > x) = 0,01$ .  
En déduire, sans justification, le plus petit entier  $k$  tel que la probabilité que le lot comporte plus de  $k$  appareils défectueux soit inférieure à 0,01.

## Exercice 2 (9 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

### Partie A

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels.

Soit  $f$  une fonction périodique de période 1, définie sur  $[0 ; 1[$  par  $f(t) = \alpha t + \beta$ .

On appelle  $a_0, a_n$  et  $b_n$  les coefficients de Fourier associés à la fonction  $f$ .

1. Montrer que  $a_0 = \frac{\alpha}{2} + \beta$ .
2. Montrer que  $b_n = -\frac{\alpha}{n\pi}$  pour tout nombre entier naturel  $n$  non nul.

On admet que  $a_n = 0$  pour tout nombre entier naturel  $n$  non nul.

3. On se propose de déterminer les nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  pour que le développement  $S$  en série de Fourier de la fonction  $f$  soit défini pour tout nombre réel  $t$  par  $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(2n\pi t)$ .
  - a) Déterminer les nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $a_0 = 0$  et  $b_n = \frac{1}{n}$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.  
En déduire l'expression de la fonction  $f$ .
  - b) Représenter la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-2 ; 2]$  dans un repère orthogonal.

### Partie B

On veut résoudre l'équation différentielle :

$$s''(t) + s(t) = f(t).$$

On admet que l'on obtient une bonne approximation de la fonction  $s$  en remplaçant  $f(t)$  par les premiers termes du développement en série de Fourier de la fonction  $f$  obtenus dans la partie A, c'est-à-dire par :

$$\sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(4\pi t).$$

Soit (E) l'équation différentielle :

$$s''(t) + s(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(4\pi t).$$

1. Vérifier que la fonction  $s_1$  définie pour tout nombre réel  $t$  par :

$$s_1(t) = \frac{1}{1-4\pi^2} \sin(2\pi t) + \frac{1}{2(1-16\pi^2)} \sin(4\pi t)$$

est solution de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E).

# FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

---

## **BTS : GROUPEMENT A**

CONTROLE INDUSTRIEL ET REGULATION AUTOMATIQUE

ELECTROTECHNIQUE

GENIE OPTIQUE

INFORMATIQUE ET RESEAUX POUR L'INDUSTRIE  
ET LES SERVICES TECHNIQUES

SYSTEMES ELECTRONIQUES

TECHNIQUES PHYSIQUES POUR L'INDUSTRIE ET LE LABORATOIRE

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

### 1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$$

$$a^t = e^{t \ln a}, \text{ où } a > 0$$

$$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}, \text{ où } t > 0$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$$

$$e^{a+ib} = e^{at} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)), \text{ où } a = \alpha + i\beta$$

### 2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

#### a) Limites usuelles

##### Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 ;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

##### Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

##### Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0.$$

**b) Dérivées et primitives**

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	Arc sin $t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$e^t$	$e^t$	Arc tan $t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha$ ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )	$\alpha t^{\alpha-1}$	$e^{at}$ ( $a \in \mathbb{C}$ )	$ae^{at}$
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

**c) Calcul intégral**

Valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

**d) Développements limités**

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

**e) Equations différentielles**

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où $G$ est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$	Si $\Delta > 0$ , $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ ..... où $r_1$ et $r_2$ sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$ , $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ ..... où $r$ est la racine double de l'équation caractéristique
$ax^2 + bx + c = 0$	Si $\Delta < 0$ , $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
de discriminant $\Delta$	

### 3. SERIES DE FOURIER

$f$ : fonction périodique de période  $T$ ;

développement en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t}, \quad (n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}).$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos(n\omega t) dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad (k \in \mathbb{Z}); \quad c_0 = a_0; \quad \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n; \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

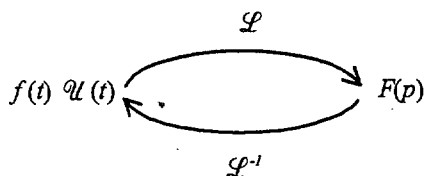
### 4. TRANSFORMATION DE LAPLACE

Fonctions usuelles

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p}; \quad \mathcal{L}(t\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p^2}; \quad \mathcal{L}(t^n \mathcal{U}(t)) = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$\mathcal{L}(e^{-at} \mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p+a}; \quad \mathcal{L}(\sin(\omega t) \mathcal{U}(t)) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}; \quad \mathcal{L}(\cos(\omega t) \mathcal{U}(t)) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Propriétés



$f(\alpha t) \mathcal{U}(t) \quad \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
$f(t-\tau) \mathcal{U}(t-\tau)$	$F(p) e^{-\tau p}$
$f(t) e^{-at} \mathcal{U}(t)$	$F(p+a)$
$f'(t) \mathcal{U}(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
$f''(t) \mathcal{U}(t)$	$p^2 F(p) - p f(0^+) - f'(0^+)$
$-t f(t) \mathcal{U}(t)$	$F'(p)$
$\int_0^t f(u) \mathcal{U}(u) du$	$\frac{F(p)}{p}$

5. TRANSFORMATION EN Z

Signal causal $n \mapsto x(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$	Transformée en Z $z \mapsto (Zx)(z)$
$e(n) = 1$	$(Ze)(z) = \frac{z}{z-1}$
$\begin{cases} d(0) = 1 \\ d(n) = 0 \text{ si } n \neq 0 \end{cases}$	$(Zd)(z) = 1$
$r(n) = n$	$(Zr)(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$
$c(n) = n^2$	$(Zc)(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$f(n) = a^n, a \in \mathbb{R} - \{0\}$	$(Zf)(z) = \frac{z}{z-a}$
$y(n) = a^n x(n), a \in \mathbb{R} - \{0\}$	$(Zy)(z) = (Zx)\left(\frac{z}{a}\right)$
$y(n) = x(n - n_0), (n - n_0) \in \mathbb{N}$ ou $y(n) = x(n - n_0) e(n - n_0)$	$(Zy)(z) = z^{-n_0} (Zx)(z)$
$y(n) = x(n + 1)$	$(Zy)(z) = z[(Zx)(z) - x(0)]$
$y(n) = x(n + 2)$	$(Zy)(z) = z^2[(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1}]$
$y(n) = x(n + n_0), n_0 \in \mathbb{N}^*$	$(Zy)(z) = z^{n_0} [(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1} - x(2)z^{-2} \dots - x(n_0 - 1)z^{-(n_0-1)}]$

6. PROBABILITES

a) Loi binomiale  $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$  où  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  ;  $E(X) = np$  ;  $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

$k \backslash \lambda$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

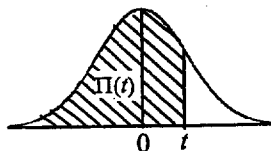
$k \backslash \lambda$	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE  $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota :  $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

---

**BTS : groupement A**

**CONTRÔLE INDUSTRIEL  
ET REGULATION AUTOMATIQUE**

**ELECTRONIQUE**

**ELECTROTECHNIQUE**

**GENIE OPTIQUE**

**INFORMATIQUE INDUSTRIELLE**

**TECHNIQUES PHYSIQUES  
POUR L'INDUSTRIE ET LE LABORATOIRE**

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

### 1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$$

$$a^t = e^{t \ln a}, \text{ où } a > 0$$

$$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}, \text{ où } t > 0$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$$

$$e^{\alpha t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)), \text{ où } \alpha = \alpha + i\beta$$

### 2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

#### a) Limites usuelles

##### Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 ;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

##### Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

##### Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0.$$

**b) Dérivées et primitives**

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	Arc sin $t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$e^t$	$e^t$	Arc tan $t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha$ ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )	$\alpha t^{\alpha-1}$	$e^{at}$ ( $a \in \mathbb{C}$ )	$ae^{at}$
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k u'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

**c) Calcul intégral**

Valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

**d) Développements limités**

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

**e) Equations différentielles**

Equations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où $G$ est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$\alpha x'' + \beta x' + \gamma x = 0$	Si $\Delta > 0$ , $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \dots$ où $r_1$ et $r_2$ sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$ , $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt} \dots$ où $r$ est la racine double de l'équation caractéristique
$ax^2 + bx + c = 0$	Si $\Delta < 0$ , $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
de discriminant $\Delta$	

### 3. SERIES DE FOURIER

$f$ : fonction périodique de période  $T$ ;

développement en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t}, \quad (n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}).$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos(n\omega t) dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad (k \in \mathbb{Z}); \quad c_0 = a_0; \quad \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n; \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

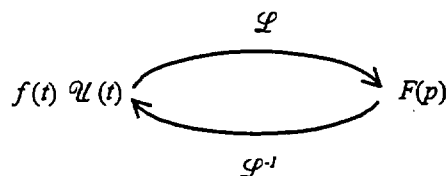
### 4. TRANSFORMATION DE LAPLACE

Fonctions usuelles

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p}; \quad \mathcal{L}(t\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p^2}; \quad \mathcal{L}(t^n \mathcal{U}(t)) = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$\mathcal{L}(e^{-at} \mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p+a}; \quad \mathcal{L}(\sin(\omega t) \mathcal{U}(t)) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}; \quad \mathcal{L}(\cos(\omega t) \mathcal{U}(t)) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Propriétés



$f(\alpha t) \mathcal{U}(t) \quad \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
$f(t-\tau) \mathcal{U}(t-\tau)$	$F(p) e^{-\tau p}$
$f(t) e^{-at} \mathcal{U}(t)$	$F(p+a)$
$f'(t) \mathcal{U}(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
$f''(t) \mathcal{U}(t)$	$p^2 F(p) - p f(0^+) - f'(0^+)$
$-t f(t) \mathcal{U}(t)$	$F'(p)$
$\int_0^t f(u) \mathcal{U}(u) du$	$\frac{F(p)}{p}$

### 5. TRANSFORMATION EN Z

Signal causal $n \mapsto x(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$	Transformée en Z $z \mapsto (Zx)(z)$
$e(n) = 1$	$(Ze)(z) = \frac{z}{z-1}$
$\begin{cases} d(0) = 1 \\ d(n) = 0 \text{ si } n \neq 0 \end{cases}$	$(Zd)(z) = 1$
$r(n) = n$	$(Zr)(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$
$c(n) = n^2$	$(Zc)(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$f(n) = a^n, a \in \mathbb{R} - \{0\}$	$(Zf)(z) = \frac{z}{z-a}$
$y(n) = a^n x(n), a \in \mathbb{R} - \{0\}$	$(Zy)(z) = (Zx)\left(\frac{z}{a}\right)$
$y(n) = x(n - n_0), (n - n_0) \in \mathbb{N}$ ou $y(n) = x(n - n_0) e(n - n_0)$	$(Zy)(z) = z^{-n_0} (Zx)(z)$
$y(n) = x(n + 1)$	$(Zy)(z) = z[(Zx)(z) - x(0)]$
$y(n) = x(n + 2)$	$(Zy)(z) = z^2[(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1}]$
$y(n) = x(n + n_0), n_0 \in \mathbb{N}^*$	$(Zy)(z) = z^{n_0} [(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1} - x(2)z^{-2} \dots - x(n_0 - 1)z^{-(n_0-1)}]$

## 6. PROBABILITES

a) Loi binomiale  $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$  où  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ;  $E(X) = np$ ;  $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

$k \backslash \lambda$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

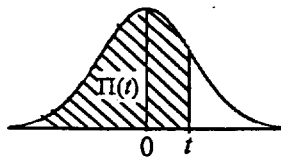
$k \backslash \lambda$	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE  $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota :  $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$