

## Examen final UV MN42 (14h-16h)

Aucun document n'est autorisé

Les calculatrices sont permises

Les calculs doivent être détaillés.

## Exercice I

Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} 4x_1 - \alpha x_2 - \alpha x_3 &= b_1 \\ -\alpha x_1 + 4x_2 - \alpha x_4 &= b_2 \\ -\alpha x_1 + 4x_3 - \alpha x_4 &= b_3 \\ -\alpha x_2 - \alpha x_3 + 4x_4 &= b_4 \end{aligned}$$

où  $\alpha$  est un réel à déterminer.

a- Expliciter la matrice  $A$  et le vecteur résultat pour que le système ci dessus puisse s'écrire sous la forme matricielle  $A \vec{x} = \vec{b}$ .

b- On décompose la matrice  $A$  en une somme de trois matrices  $D$ ,  $E$  et  $F$  telle que :  $A=D-E-F$ .

La matrice  $D$  représente la diagonale de la matrice  $A$ La matrice  $E$  étant l'opposée de la partie strictement en dessous de la diagonale de  $A$ .La matrice  $F$  étant l'opposée de la partie strictement au dessus de la diagonale de  $A$ .On résout le système  $A \vec{x} = \vec{b}$  par la méthode itérative suivante :

$$\begin{cases} \vec{x}^0 \\ \vec{x} \text{ donné} \\ \vec{x}^{(k+1)} = D^{-1}(E+F)\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b}, k=0,1,2,\dots \end{cases} \quad (1)$$

c- A l'itération  $(k+1)$ , écrire l'expression des composantes  $(x_i)$  du vecteur  $\vec{x}^{(k+1)}$

d- On définit la matrice  $J$  par :

$$J = D^{-1}(E+F)$$

Expliciter la matrice  $J$ 

La méthode de résolution adoptée (1) est convergente si le rayon spectral de la matrice  $J$  est strictement inférieur à 1. Quelle condition doit vérifier le paramètre  $\alpha$  pour que la méthode de résolution (1) converge.

c- En respectant cette condition de convergence (concernant le paramètre  $\alpha$ ), montrer que la matrice  $A$  est à diagonale faiblement dominante.

## Exercice II

$A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  définie sous la forme suivante :  $A=I-E-F$ .

La matrice  $I$  est une matrice carrée unité d'ordre  $n$ .La matrice  $E$  étant l'opposée de la partie strictement en dessous de la diagonale de  $A$ .La matrice  $F$  étant l'opposée de la partie strictement au dessus de la diagonale de  $A$ .

$$A = (a_{i,j}) \text{ avec : } a_{i,j} \begin{cases} = 1 & \text{si } i = j \\ \neq 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

On utilise la méthode numérique suivante pour résoudre le système  $A \vec{x} = \vec{b}$

$$(I-E) \vec{x}^{(2k+1)} = F \vec{x}^{(2k)} + \vec{b} \quad (II.1)$$

$$(I-F) \vec{x}^{(2k+2)} = E \vec{x}^{(2k+1)} + \vec{b} \quad (II.2)$$

a- Expliciter les matrices  $I$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $(I-E)$  et  $(I-F)$

- b- Ecrire l'expression générale des composantes du vecteur  $\vec{x}$  à l'itération  $(2k+1)$  déduite de l'équation (II.1)
- c- Ecrire l'expression générale des composantes du vecteur  $\vec{x}$  à l'itération  $(2k+2)$  déduite de l'équation (II.2).
- d- Ecrire une procédure (ou un algorithme) de résolution très simplifiée utilisant la méthode numérique définie par les équations (II.1) et (II.2) (aucun langage informatique ne doit être utilisé).

**Exercice III**

Soit les problèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} \frac{d^3 y(x)}{dx^3} = x^2 y(x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - y(x) \frac{dz(x)}{dx} & \text{avec : } x \in [a, b] \\ \text{avec : } y(a) = y_a \text{ et } y'(a) = y'_a \text{ et } y''(a) = y''_a \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 z(x)}{dx^2} = x z(x) \frac{dz(x)}{dx} + 4 \frac{dy(x)}{dx} & \text{avec : } x \in [a, b] \\ \text{avec : } z(a) = z_a \text{ et } z'(a) = z'_a \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Les conditions aux limites  $y_a, y'_a, y''_a, z_a$  et  $z'_a$  sont des valeurs connues.

On définit un vecteur  $\vec{W}_y(x) = \begin{pmatrix} u_y(x) \\ v_y(x) \\ w_y(x) \end{pmatrix}$  tel que :  $u_y(x) = y(x)$ ,  $v_y(x) = y'(x)$  et  $w_y(x) = y''(x)$

On définit un autre vecteur  $\vec{W}_z(x) = \begin{pmatrix} u_z(x) \\ v_z(x) \end{pmatrix}$  tel que :  $u_z(x) = z(x)$  et  $v_z(x) = z'(x)$

a- Montrer que les problèmes (III.1) et (III.2) peuvent s'écrire sous les formes vectorielles suivantes et déterminer les expressions des fonctions vectorielles  $\vec{F}_y$  et  $\vec{F}_z$  :

$$\begin{cases} \vec{W}_y'(x) = \vec{F}_y(x, \vec{W}_y(x), \vec{W}_z(x)) & \text{pour } x \in [a, b] \\ \vec{W}_y(a) = \vec{W}_{y_a} \\ \vec{W}_z'(x) = \vec{F}_z(x, \vec{W}_y(x), \vec{W}_z(x)) & \text{pour } x \in [a, b] \\ \vec{W}_z(a) = \vec{W}_{z_a} \end{cases}$$

b- Si on adopte la méthode de résolution définie sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \vec{W}_0 \text{ donné} \\ \vec{W}_{i+1} = \vec{W}_i + h \vec{F}(x_i, \vec{W}_i) & \text{pour } i \geq 0 \end{cases}$$

Ecrire les expressions des composantes de chaque vecteur  $\vec{W}_{y_{i+1}}$  et  $\vec{W}_{z_{i+1}}$  pour  $i=1, 2, 3, \dots, n-1$ .