MN42 : ANALYSE NUMERIQUE ET SIMULATION

UTBM - GSC
Semestre d'Automne 2003

Examen Final
(durée 2 heures)

Exercice 1 (Sur 10 points)

Etant donnés les polynômes de Legendre définis par :

$$L_0(x) = 1 \quad , \quad L_1(x) = x$$
$$L_k(x) = \frac{2k-1}{k} x L_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k} L_{k-2}(x) \quad , \quad k = 2,\ 3,\ \ldots$$

On veut établir la formule d'intégration numérique suivante :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = A_1.f(x_1) + A_2.f(x_2) + A_3.f(x_3) \tag{1}$$

où $A_1,\ A_2,\ A_3$ sont des réels à déterminer et $x_1,\ x_2,\ x_3$ sont les racines du polynôme de Legendre $L_3(x)$.

1. Calculer $x_1,\ x_2,\ x_3$, puis déterminer les constantes $A_1,\ A_2,\ A_3$ de telle sorte que la formule d'intégration (1) soit exacte pour tout polynôme de degré ≤ 2.
2. Quel est le degré de précision de la formule d'intégration (1).
3. En utilisant la formule d'intégration (1) , calculer une valeur approchée de l'intégrale
$$J = \int_0^1 x \exp(-x)\, dx$$
4. Calculer la valeur exacte de J, puis l'erreur absolue commise.
5. On veut utiliser maintenant la formule des trapèzes composée pour calculer J, pour cela on divise l'intervalle $[0,1]$ en n sous intervalles égaux de longueur h. Quelle valeur doit-on donner à n si l'on désire une précision d'au moins 10^{-7}.

Exercice 2 (Sur 5 points)

Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(x) = \ln\left(x + xy^2(x)\right) \quad , \quad \forall x \in [1, +\infty[\\ y(1) = 0. \end{cases}$$

1. Montrer, en appliquant le théorème de Cauchy, que cette équation admet une solution unique. On pourra appliquer le théorème des accroissements finis pour déterminer la constante L.
2. Écrire et appliquer l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2 pour déterminer les valeurs approchées de la solution y pour les trois premiers pas de discrétisation en prenant un pas $h = 0.05$.

.../...

Exercice 3 (Sur 5 points)

1. Écrire l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2 pour résoudre un système d'équations différentielles du premier ordre de la forme :

$$\begin{cases} y'(x) &= F(x, y(x), z(x)) \quad , \quad y(0) = y_0 \\ z'(x) &= G(x, y(x), z(x)) \quad , \quad z(0) = z_0 \end{cases}$$

2. On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\begin{cases} y''(x) &= -3xy'(x) - x^2 y(x) + \ln(1+x) \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{cases}$$

a- Ecrire cette équation différentielle du second ordre sous la forme du système d'équations différentielles du premier ordre de la question 1.

b- En utilisant l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2 de la question 1., calculer les valeurs approchées de la solution y pour les trois premiers pas de discrétisation en prenant un pas $h = 0.25$.