BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

GROUPEMENT E

MATHEMATIQUES

SESSION 2002

SUJET

Durée : 1 heure 30

Le sujet est composé de 3 pages numérotées de 1/4 à 4/4.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 1 page, numérotée 4/4

SPECIALITES	COEFFICIENT
ARCHITECTURE INTERIEURE	1,5
ART CERAMIQUE	1,5
ART TEXTILE ET IMPRESSION	1,5
EXPRESSION VISUELLE OPTION ESPACES DE COMMUNICATION	1,5
PLASTICIEN DE L'ENVIRONNEMENT ARCHITECTURAL	1,5
STYLISME DE MODE	1,5

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

EXERCICE 1 : (12 points)

1. Soit f la fonction définie sur [0 ; 5] par $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2 + 24x)$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

a) Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
b) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$. Etudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans [0 ; 5].
c) Dresser le tableau des variations de f.
d) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ à l'origine O du repère.
e) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente T.

2. Soit g la fonction définie sur [0 ; 5] par $g(x) = -x^2 + ax + b$

   Déterminer les réels a et b sachant que la courbe représentative de g passe par l'origine O du repère et par le point A de coordonnées (5 ; 5).

3. Soit h la fonction définie sur [0 ; 5] par $h(x) = -x^2 + 6x$

a) Calculer $h'(x)$ où h' désigne la fonction dérivée de h.
   Etudier le signe de $h'(x)$ lorsque x varie dans [0 ; 5].
b) Dresser le tableau des variations de h.
c) Montrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$ ont, en O, la même tangente T.
d) Construire la courbe $\mathcal{C}_h$ dans le même repère que précédemment.

4. Soit $\mathcal{S}$ la partie du plan comprise entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$. Calculer l'aire de $\mathcal{S}$ en cm^2, on en donnera la valeur exacte et une valeur arrondie au centième.

5. Construire les images $\mathcal{C}'_f$ et $\mathcal{C}'_h$ de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$ par la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens direct (c'est à dire inverse des aiguilles d'une montre). Construire ensuite les images des quatre courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_h$, $\mathcal{C}'_f$ et $\mathcal{C}'_h$ par la symétrie de centre O.

EXERCICE 2 : (8 points)

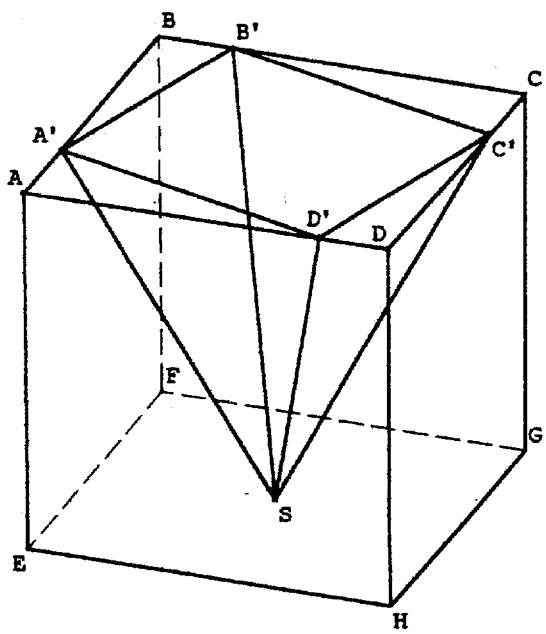
Toutes les mesures de longueur sont en cm et de volume en cm^3.
On considère la figure ci-contre, dans laquelle :

- ABCDEFGH est un cube d'arête 6.
- On a placé :
  - A' sur [AB] tel que AA' = x
  - B' sur [BC] tel que BB' = x
  - C' sur [CD] tel que CC' = x
  - D' sur [DA] tel que DD' = x

où x est un nombre réel de l'intervalle [0 ;6]

(On sait alors que A'B'C'D' est un carré)

- On note S le centre du carré EFGH



1. Montrer que le volume noté $V(x)$ de la pyramide SA'B'C'D' est $V(x) = 4(x^2 - 6x + 18)$. On rappelle que le volume d'une pyramide est égal à $\frac{1}{3} b \times h$ où b désigne l'aire de sa base et h la mesure de sa hauteur.

2. On prend maintenant $x = 2$

a) Calculer alors les mesures, arrondies au centième, des arêtes de la pyramide.

b) Calculer ensuite la mesure en degré, arrondie au centième, de l'angle $\widehat{A'SC'}$.

ANNEXE : FORMULAIRE

A. Identités remarquables:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

B. Dérivées et primitives:

1. Dérivées et primitives de fonctions usuelles

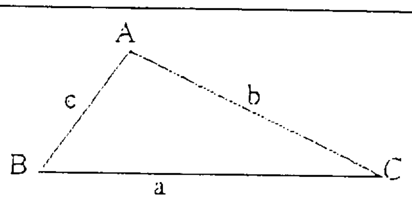
$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

2. Opérations sur les dérivées

$$(u+v)' = u' + v'$$
$$(ku)' = ku'$$
$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

C. Formules dans un triangle quelconque:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$



L'aire du triangle ABC est donnée par : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \operatorname{Sin} \hat{A}$

D. Distance de deux points:

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$, si A a pour coordonnées $(x_A\ ;\ y_A)$ et si B a pour coordonnées $(x_B\ ;\ y_B)$, alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$