

Exercice 1. (11 points)

On rappelle que la fonction échelon unité, notée U , est définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Une fonction définie sur \mathbb{R} est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.

1. On considère la fonction causale e définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e(t) = 4[U(t) - U(t - 2)].$$

a) Tracer la représentation graphique de la fonction e dans un repère orthormal.

b) On note E la transformée de Laplace de la fonction e .

Déterminer $E(p)$.

2. On considère la fonction s telle que :

$$4s'(t) + s(t) = e(t) \quad \text{et} \quad s(0) = 0.$$

On admet que la fonction s possède une transformée de Laplace, notée S .

Démontrer que :

$$S(p) = \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{4} \right)} (1 - e^{-2p}).$$

3. Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$$\frac{1}{p \left(p + \frac{1}{4} \right)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p + \frac{1}{4}}.$$

4. Compléter le tableau ci-dessous dans lequel f désigne la fonction causale associée à F :

$F(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p}e^{-2p}$	$\frac{1}{p + \frac{1}{4}}$	$\frac{1}{p + \frac{1}{4}}e^{-2p}$
$f(t)$	$U(t)$			

5. a) Déterminer $s(t)$, t désignant un nombre réel quelconque.

b) Vérifier que :

$$\begin{cases} s(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ s(t) = 4 - 4e^{-\frac{t}{4}} & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ s(t) = 4e^{-\frac{t}{4}} \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 \right) & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

6. a) Justifier que la fonction s est croissante sur l'intervalle $[0; 2]$

b) Déterminer $\lim_{\substack{t \rightarrow 2 \\ t < 2}} s(t)$.

7. a) Déterminer le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

b) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$.

8. Tracer la courbe représentative de la fonction s dans un repère orthonormal.

Exercice 2. (9 points)

dans ce problème, on approche un signal à l'aide d'une fonction affine par morceaux.

On désigne par E un nombre réel de l'intervalle $]0; 3[$.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} , **paire**, périodique de **période 5**, telle que :

$$f(t) = \begin{cases} E \times t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ (3 - E)t + 2E - 3 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 3 & \text{si } 2 \leq t \leq \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Partie A :

Dans cette **partie**, et **uniquement dans cette partie**, on se place dans le cas où $E = 2$.

1. Préciser l'écriture de $f(t)$ sur chacun des intervalles $[0; 1[$, $[1; 2[$ et $\left[2; \frac{5}{2}\right]$.
2. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-5; 10]$.

Partie B :

Dans cette **partie**, on se place dans le **cas général**, c'est-à-dire dans le cas où la valeur de E n'est pas spécifiée.

On appelle S la série de Fourier associée à la fonction f .

On note $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) \right)$.

1. Montrer que la valeur moyenne de la fonction f sur une période est $a_0 = 2\frac{E+3}{5}$.
2. Déterminer b_n pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1.
3. a) Montrer que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$\int_0^1 t \cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) dt = \frac{5}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi}{5}\right) + \frac{25}{4n^2\pi^2} \left(\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right) - 1 \right).$$

- b) On a calculé les intégrales $\int_1^2 f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) dt$ et $\int_2^{\frac{5}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) dt$.

On a ainsi obtenu, pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) dt = \frac{25}{4n^2\pi^2} \left((2E - 3) \cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right) + (3 - E) \cos\left(\frac{4n\pi}{5}\right) - E \right).$$

En déduire que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$a_n = \frac{5}{n^2\pi^2} \left((2E - 3) \cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right) + (3 - E) \cos\left(\frac{4n\pi}{5}\right) - E \right).$$

4. Pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1, on appelle u_n l'harmonique de rang n .

On a alors $u_n(t) = a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)$ pour tout nombre réel t .

- a) Montrer qu'au rang 5, $u_5(t)$ est nul pour tout nombre réel t .
- b) On appelle E_0 la valeur de E pour laquelle l'harmonique de rang 3 est nulle, c'est-à-dire la valeur de E telle que $u_3(t)$ est nul pour tout nombre réel t .
Déterminer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de E_0 .

Dans ce problème, à l'aide d'un transformateur à diode, on approche un signal sinusoïdal redressé par une fonction affine par morceaux.

Un tel signal avec $u_3(t) = u_5(t) = 0$ permettra :

- s'il est associé à un moteur, de réduire les à-coups du couple
- s'il est associé à un transformateur, d'éviter des pertes
- s'il est associé à un filtre, d'éliminer plus facilement les harmoniques de rang impair d'ordre supérieur.