Mathématiques - Brevet de technicien supérieur
Session 2009 - Groupement A
Spécialités CIRA, Systèmes électroniques

Le sujet comprend 7 pages, numérotées de 1 à 7 Les pages 5, 6 et 7 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 - (9 points)

Le but de cet exercice est d'établir, avec un minimum de calculs, le développement en série de Fourier de fonctions périodiques rencontrées en électricité.

1. On considère un entier naturel n strictement positif. Montrer que :

$$\int_0^1 t\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}$$

Pour la suite de l'exercice, on admet que : $\displaystyle\int_0^1 t\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, périodique de **période 2**,telle que :

$$\begin{cases} f(t) = t & \text{sur } [0;1[\\ f(t) = 0 & \text{sur} [1;2[\end{cases}$$

(a) En utilisant le **document réponse n°1, à rendre avec la copie** , tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-4;4]$.

(b) On appelle S_f la série de Fourier associée à la fonction f.

On note $S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n\cos(n\pi t) + b_n\sin(n\pi t)]$

Calculer a_0

Donner les valeurs des coefficients a_n et b_n et en déduire que :

$$S_f(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]$$

(c) Calculer le carré de la valeur efficace de la fonction f, défini par $\mu_{eff}^2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 [f(t)]^2\,\mathrm{d}t$.

(d) Recopier et compléter, avec les valeurs exactes, le tableau suivant :

n	1	2	3
a_n			
b_n			

(e) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre réel A défini par :

$$A = \frac{a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}(a_n^2 + b_n^2)}{\mu_{eff}^2}$$

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de **période 2**, dont la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ est tracée sur l'intervalle $[-4;4]$ dans le document réponse n°1.
On admet que le développement en série de Fourier $S_g(t)$ associé à la fonction g, est défini par :

$$S_g(t) = S_f(-t)$$

Justifier que :

$$S_g(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi t) + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} \sin(n\pi t) \right]$$

4. Soit h et k les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, périodiques de **période 2**, telles que :

$$h(t) = f(t) + g(t) \quad \text{et} \quad k(t) = f(t) - g(t) \text{pour tout nombre réel} t$$

(a) Sur le **document réponse n°1, à rendre avec la copie**, tracer les courbes $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_k$ représentatives des fonctions h et k sur l'intervalle $[-4;4]$.

(b) On admet que les développements en série de Fourier S_h et S_k associés respectivement aux fonctions h et k, sont définis par :

$$S_h(t) = S_f(t) + S_g(t) \quad \text{et} \quad S_k(t) = S_f(t) - S_g(t)$$

Déterminer les coefficients de Fourier associés respectivement aux fonctions h et k.

Exercice 2 - (11 points)

Dans cet exercice, on étudie un système « entrée-sortie ».
La partie A permet de déterminer la réponse à l'échelon unité.
Les parties B et C permettent d'étudier les perturbations résultant d'une coupure de 0,1 *seconde.*

On rappelle que la fonction échelon unité est définie par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

et qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

Partie A :
On considère la fonction causale s_1 telle que, pour tout nombre réel t :

$$s_1(t) + \int_0^t s_1(u)\,\mathrm{d}u = U(t) \qquad (E_1)$$

On note S_1 la transformée de Laplace de la fonction s_1.

1. Montrer que $S_1(p) = \dfrac{1}{p+1}$.
2. En déduire $s_1(t)$ pour tout nombre réel t.
   La courbe représentative de la fonction s_1 est donnée par la **figure 1 du document réponse n°2**.

Partie B :
On considère la fonction causale s_2 telle que, pour tout nombre réel t :

$$s_2(t) + \int_0^t s_2(u)\,\mathrm{d}u = U(t) - U(t-1) \qquad (E_2)$$

On note S_2 la transformée de Laplace de la fonction s_2.

1. Représenter graphiquement la fonction e_2 définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e_2(t) = U(t) - U(t-1)$$

2. Déterminer $S_2(p)$
3. (a) En déduire $s_2(t)$ pour tout nombre réel t.
   (b) Justifier que :

$$\begin{cases} s_2(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ s_2(t) = \mathrm{e}^{-t} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ s_2(t) = -\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}-1) & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

4. Établir le sens de variation de la fonction s_2 sur l'intervalle $]1;+\infty[$
5. Calculer $s_2(1^+) - s_2(1^-)$
6. On appelle $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de la fonction s_2.
   (a) Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

t	1	1,1	1,5	2	2,5
s_2					

Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

(b) Compléter le tracé de la courbe $\mathscr{C}_2$ sur **la figure 2 du document réponse n°2, à rendre avec la copie.**

Partie C :

On considère la fonction causale s_3 telle que, pour tout nombre réel t :

$$s_3(t) + \int_0^t s_2(u)\,\mathrm{d}u = U(t) - U(t-1) + U(t-1,1) \qquad (E_3)$$

1. Soit la fonction e_3 définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e_3(t) = U(t) - U(t-1) + U(t-1,1)$$

(a) Montrer que $\mathrm{e}_3(t) = \mathrm{e}_2(t)$ pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $]-\infty;1,1[$.

(b) Déterminer $\mathrm{e}_3(t)$ pour $t \geq 1$.

(c) Représenter graphiquement la fonction e_3.
Par la suite, on admet que :

$$\begin{cases} s_3(t) = s_2(t) & \text{si } t < 1,1 \\ s_3(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(1 - \mathrm{e} + \mathrm{e}^{1,1}\right) & \text{si } t \geq 1,1 \end{cases}$$

2. Établir le sens de variation de la fonction s_3 sur l'intervalle $]1,1;+\infty[$.
3. Calculer $s_3(1,1^+) - s_3(1,1^-)$
4. On appelle $\mathscr{C}_3$ la courbe représentative de la fonction s_3.

(a) Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

t	1,1	1,5	2	2,5
s_3				

Les résultats seront donnés à 10^{-2}près.

(b) Compléter le tracé de la courbe $\mathscr{C}_3$ sur la **la figure 3 du document réponse n°2, à rendre avec la copie.**

Document réponse n°1, à rendre avec la copie (exercice 1)

Figure 1 : Représentation graphique de la fonction f

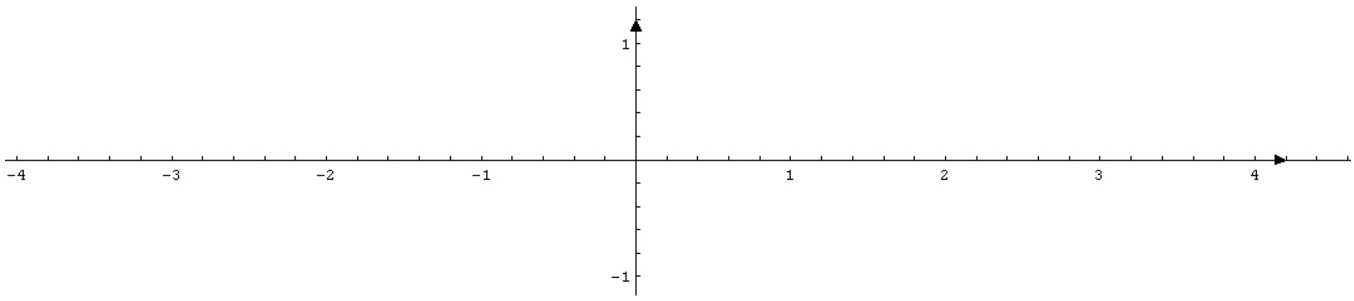


Figure 2 : Représentation graphique de la fonction g

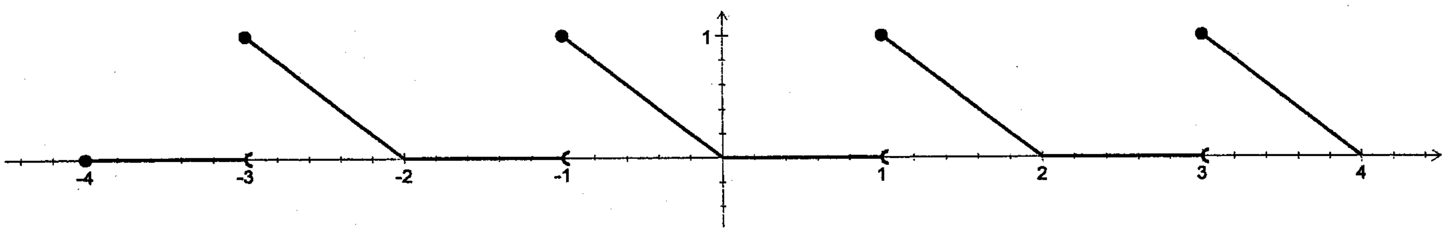
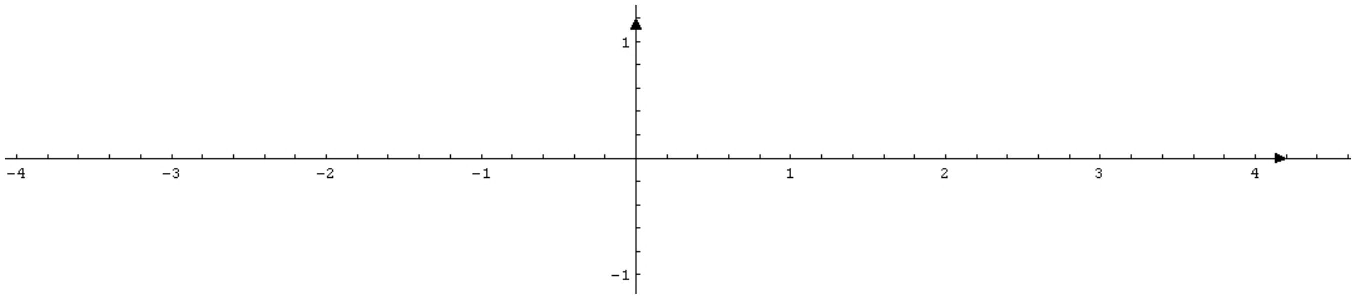
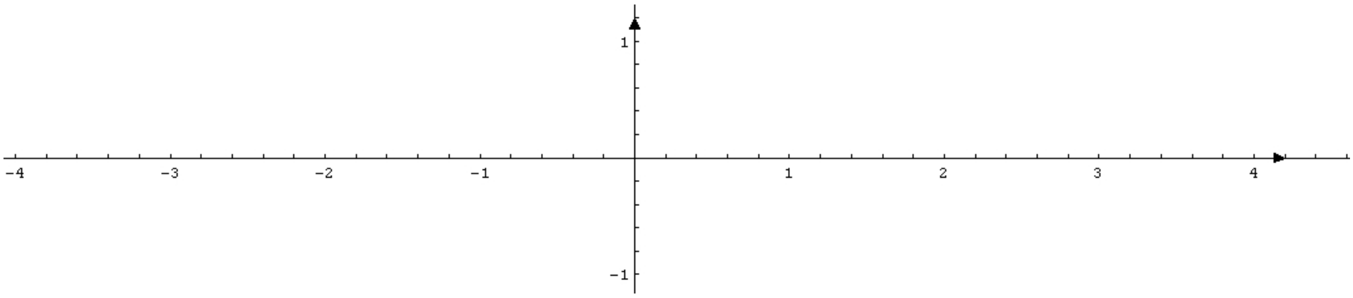


Figure 3 : Représentation graphique de la fonction h



Document réponse n°1, à rendre avec la copie (exercice 1)

Figure 4 : Représentation graphique de la fonction k



Document réponse n°2, à rendre avec la copie (exercice 2)

Figure 1 : Représentation graphique de la fonction s_1

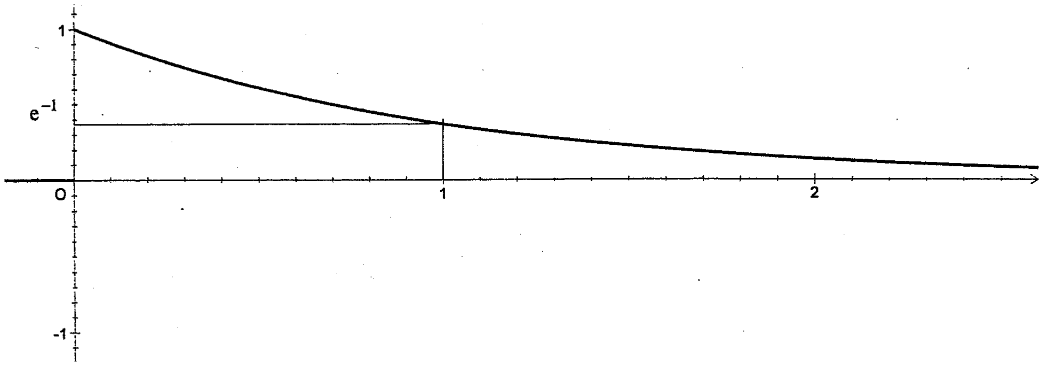


Figure 2 : Représentation graphique de la fonction s_2 à compléter

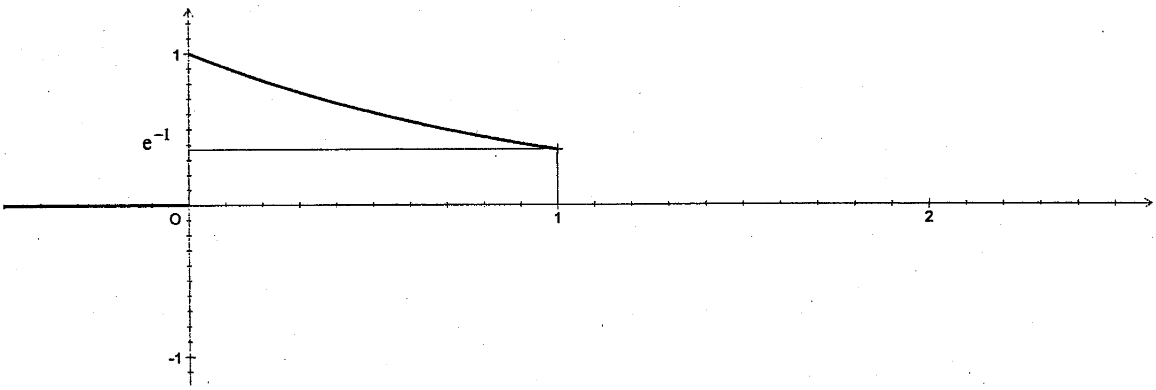


Figure 3 : Représentation graphique de la fonction s_3 à compléter