PS26 Electromagnétisme
Examen final A2001 : 3 heures

Aucun document autorisé
Calculatrice interdite

Commencez par écrire votre nom et signez à la fin de la copie.

A lire avant de traiter l'examen

1 Lire en détails l'énoncé pour répondre aux questions posées, en particulier, veuillez respecter les notations données dans l'énoncé.

2 Si les notations de l'énoncé ne suffisent pas, toute notation que vous introduirez devra être clairement expliquée dans vos réponses et **accompagnée d'un dessin** si c'est pertinent.

3 Une réponse fausse peut dans certains cas valoir une partie des points attribués à la question. Toutefois, **les résultats non-homogènes (dimension physique fausse, un vecteur à la place d'un scalaire, ...) ou faisant intervenir des notations non-expliquées ne rapporteront aucun point,** d'où l'importance de relire vos réponses.

4 Vous pouvez traiter les différentes parties de l'examen dans un ordre indifférent **mais précisez bien le numéro de la question traitée**.

5 Si l'énoncé ne vous paraît pas clair, n'hésitez pas à poser des questions

6. En fin d'énoncé se trouvent les expressions des opérateurs dans les 3 systèmes de coordonnées usuels.

Le sujet traite de questions de cours ou très proches du cours (5 - 6 points) ainsi que d'exercices d'application (14 - 15 points).

Exercices

Pour tous les exercices et les questions de cours, le milieu entourant la matière (en particulier les distributions de charge et de courant) est le vide sauf lorsque le contraire est précisé.

Exercice 1 : électrostatique

1,5 1. Soit une cylindre de révolution d'axe Oz, droit, infini de rayon R chargé uniformément en volume. Après application rigoureuse du théorème de Gauss vous calculerez le champ électrique en tous points extérieurs et intérieurs au cylindre. 1,5 x

1,5 2. Vous tracerez l'évolution de la norme du champ électrique (à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre) calculé précédemment en fonction de la distance r à l'axe **dans le cas où la densité volumique de charge est négative.** 1 x

1,5 3. Vous vérifierez la relation de Maxwell-Gauss à la fois à l'intérieur **et** à l'extérieur du cylindre. 1,5 X

Tout en gardant la même symétrie (cylindrique), on change de configuration de charges en ne considérant plus que des matériaux conducteurs parfaits homogènes à l'équilibre électrostatique jusqu'à la fin de cet exercice. Appelons A_1 et A_2 deux matériaux de ce type.

B2 4. On considère un cylindre supposé infini d'axe Oz, droit, infini de rayon R_1 constitué du matériau A_1. Ce cylindre plein est entouré d'un cylindre creux supposé infini, limité par les rayons R_2 et R_3 et constitué du matériau A_2 de façon que le cylindre creux et le cylindre plein soient co-axiaux **(voir figure 1)**. Quelle est la capacité linéique (= capacité par unité de longueur suivant l'axe Oz) de l'ensemble constitué du cylindre plein et du cylindre creux ? 2x

Aide : pour résoudre ce problème, les grandeurs utiles (champ électrique, potentiel) sont à calculer lorsque le cylindre constitué du matériau A_1 est chargé. 5

0,75 6,5

Exercice 2 : ondes électromagnétiques

On se propose de faire des calculs à partir du rayonnement solaire mais en simplifiant le problème de la façon suivante :

- l'onde EM (=électromagnétique) provenant du soleil est supposée plane sur terre, (on appellera Oz l'axe de propagation), la terre est à z = 0 et le soleil à z = +150 10^6 km. Ce sens de z est à respecter dans la résolution des questions.
- l'onde EM provenant du soleil est supposée être harmonique et de longueur d'onde λ_0 = longueur d'onde centrale du domaine spectral visible 8
- l'onde EM provenant du soleil est supposée polarisée rectiligne suivant x. 0,5 16,5

1 1. Donnez une valeur approchée de λ_0. X

1=0,5+0,5 2. Combien de temps met l'onde émise par le soleil à atteindre la terre ? Quelle est la fréquence de cette onde ? X

3. A midi, à l'équateur terrestre, l'éclairement moyen au sol (horizontal) est de 1000 W/m^2.

   1,5 - Quelles sont les amplitudes E_0 et B_0 des champs électrique et magnétique.

1,5X

2 - Vous donnerez les **expressions vectorielles** des champs électrique, magnétique et du vecteur de Poynting (pour z >0) en fonction des données de l'énoncé ou de données que vous exprimerez en fonction de celles-ci, et bien sûr en fonction de l'espace et du temps. 1,5

2 - Vous vérifierez la loi de conservation de l'énergie pour l'onde électromagnétique en tout point entre terre et soleil et en tout temps. 2

On s'intéresse maintenant au passage à incidence normale de l'onde EM de l'air (supposé = vide pour l'onde EM) à l'eau. L'eau est supposée être un matériau non conducteur et d'indice de réfraction $n_2 = 4/3$ pour le rayonnement λ_0. Il n'y a pas de charges électriques à la surface de séparation air/eau.

2 (1+1) 4. Ecrivez les équations de passage de l'onde EM du milieu 1 (= air) au milieu 2 = eau). Parmi ces équations, lesquelles sont d'après vous utiles pour connaître les champs électriques et magnétique dans le milieu 2 ? 1,5

2 5. Vous transformerez les équations de passage « utiles » de façon à ne plus faire apparaître le champ électrique. C'est-à-dire que seuls les champs magnétiques incident ($\mathbf{B_i}$), réfléchis ($\mathbf{B_r}$) et transmis ($\mathbf{Bt}$) doivent apparaître dans ces équations.

6. Vous résoudrez les équations pour obtenir les amplitudes des champs magnétique réfléchi et transmis. son.

1 7. Quel est le pourcentage d'énergie incidente transmis à travers la surface de séparation air/eau ? 2

2 8. Vous déduirez de la réponse précédente les expressions vectorielles des champs électrique, magnétique et du vecteur de Poynting réfléchis et transmis.

2 9. Une fois dans le milieu 2 (eau), on considérera que l'eau absorbe le rayonnement EM de façon telle que tous les 10 m la moitié de l'énergie rayonnée est absorbée. Si un poisson ayant un œil supposé plan de surface 1 cm^2 orienté à 60° par rapport à l'horizontalecherche à repérer ses proies pour se nourrir, jusqu'à quelle profondeur peut-il descendre pour les voir considérant qu'il ne voit plus clair dès que le rayonnement reçu par œil est inférieur à P_0. A.N. P_0 = 1 mW. Quelle est alors l'amplitude du champ électrique au niveau de l'œil du poisson à cette profondeur maximale de visibilité. 2

Exercice 3

1,5 1. Soit un fil infini rectiligne (axe Oz) parcouru d'un courant continu. Quel est le champ magnétique créé par ce fil en tout point de l'espace . 1,5

1 2. Le fil est maintenant parcouru d'un courant variable $I = -I_0 \cos \omega t$, avec $I_0 > 0$, dessinez l'évolution du champ magnétique (composante à préciser) en un point M extérieur au fil. 1,5

On place maintenant une spire conductrice rectangulaire plane fermée (côtés a et b avec a parallèle au fil) à côté du fil (distance d). On considérera que l'ARQP (approximation des régimes quasi-permanents) est valide pour toutes les questions ce que vous expliquerez. De plus, on négligera l'auto-induction. 6

1 → **ce que vous expliquerez.**

Pour toutes les questions concernant les fem induites, vous indiquerez sur un schéma clair les sens de ces fem à un instant t = 0+.

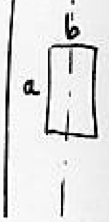
1,5 3. Quelle fem apparaît aux bornes de la spire si celle-ci est immobile et coplanaire au fil ? 1,5

1+1 4. La spire tout en restant coplanaire au fil se déplace à vitesse constante **V** (en s'éloignant du fil). **V** est orthogonale à Oz. Quelle est la fem induite dans la spire?

quare faute — Pbeaucoup d'étudiants ont résolu en considérant le champ $E_m = \vec{V} \wedge \vec{B}$ / (cf Lorentz)

2Z Quelle est d'après vous l'action mécanique (forces) exercée par le fil sur la spire en déplacement ?

1 5. Mêmes questions qu'au point 4. si la spire n'est plus animée d'une vitesse dans son plan mais tourne autour d'un axe passant par les milieux des segments de 2Z longueur b (donc axe de rotation parallèle à Oz) à une vitesse de rotation constante ω. On considérera dans ce cas que le champ magnétique est uniforme sur la surface de la spire en rotation.



1,5 1 6. Vous choisirez un des cas précédents pour illustrer la loi de Lenz.

Questions de cours

Equations de Maxwell

1. 2a Donnez les équations de Maxwell en fonction des champs **E** et **B** pour des milieux linéaires **dans le cas le plus général**. Précisez les valeurs des constantes et les unités de toutes les grandeurs. 2
2. 1,5a Rappeler ce qu'est une équation d'onde pour un champ scalaire quelconque et pour un champ vectoriel quelconque. 1
3. 2e Montrez que le champ électrique peut se propager comme une onde dans un milieu de permittivité relative ε_r et de perméabilité relative μ_r. 2

Questions diverses

1,5a 4. Qu'est-ce que le bilan d'énergie pour une onde EM dans un milieu quelconque ? Donnez les différents termes et leurs expressions. 1,5

2e 5. Démontrez le théorème de Coulomb valide pour des conducteurs à l'équilibre électrostatique. 1,5.

6. Parmi ces réponses, certaines sont vraies dans le cas général, d'autres fausses dans le cas général. Choisissez et expliquez. Si certaines ne sont vraies que dans certains cas, expliquez lesquelles. 0,55

16 / 11

a) Le champ magnétique est à flux conservatif. 0,5
b) La loi de Biot et Savart permet de calculer le champ magnétique créé par une distribution de courant et de charges dans tous les cas. 0,5
c) La relation **E** = -**grad**V est valable dans tous les cas
d) La relation **B** = **rotA** est valable dans tous les cas.
e) En un point donné, le rapport des normes d'un champ **B** par un champ **E** (dans le sens B/E) est de la dimension d'une vitesse (m/s en unité S.I.)
f) La fréquence d'une onde EM émise par une source donnée dépend du milieu rencontré.
g) La longueur d'onde d'une onde EM émise par une source donnée dépend du milieu rencontré.

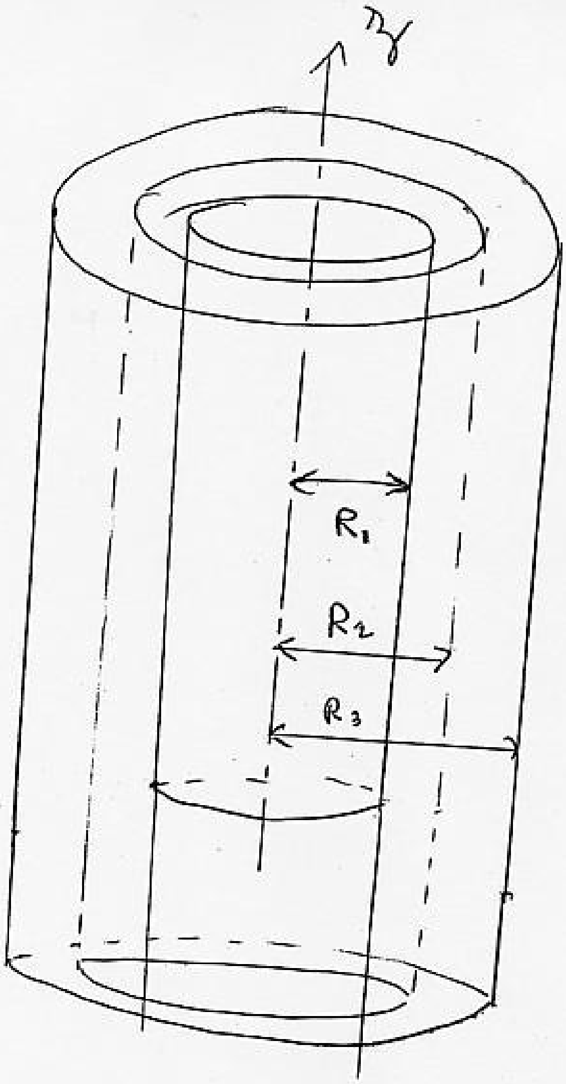


Figure 1

Informations pouvant être utiles (f scalaire, **U** vecteur):

rot grad f = **0**
div **rot U** = 0
ΔU = **grad** div **U** - **rot rot U**
Δf = div **grad** f   où Δf est le Laplacien de f.

Coordonnées cartésiennes, coordonnées (x, y z) repère local (e_x, e_y, e_z)

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$div\,\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

Coordonnées cylindriques, coordonnées (ρ, θ, z) repère local (e_ρ, e_φ, e_z)

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$div\,\vec{u} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho u_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{u} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\right]\vec{e}_\rho + \left[\frac{\partial u_\rho}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial \rho}\right]\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho u_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}\right]\vec{e}_z$$

Coordonnées sphériques (r, θ, φ) et repère local (e_r, e_θ, e_φ)

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$div\,\vec{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, u_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{u} = \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, u_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}\right]\vec{e}_r + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r u_\varphi)}{\partial r}\right]\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right]\vec{e}_\varphi$$

Pour toute application numérique prendre $\pi = 3$