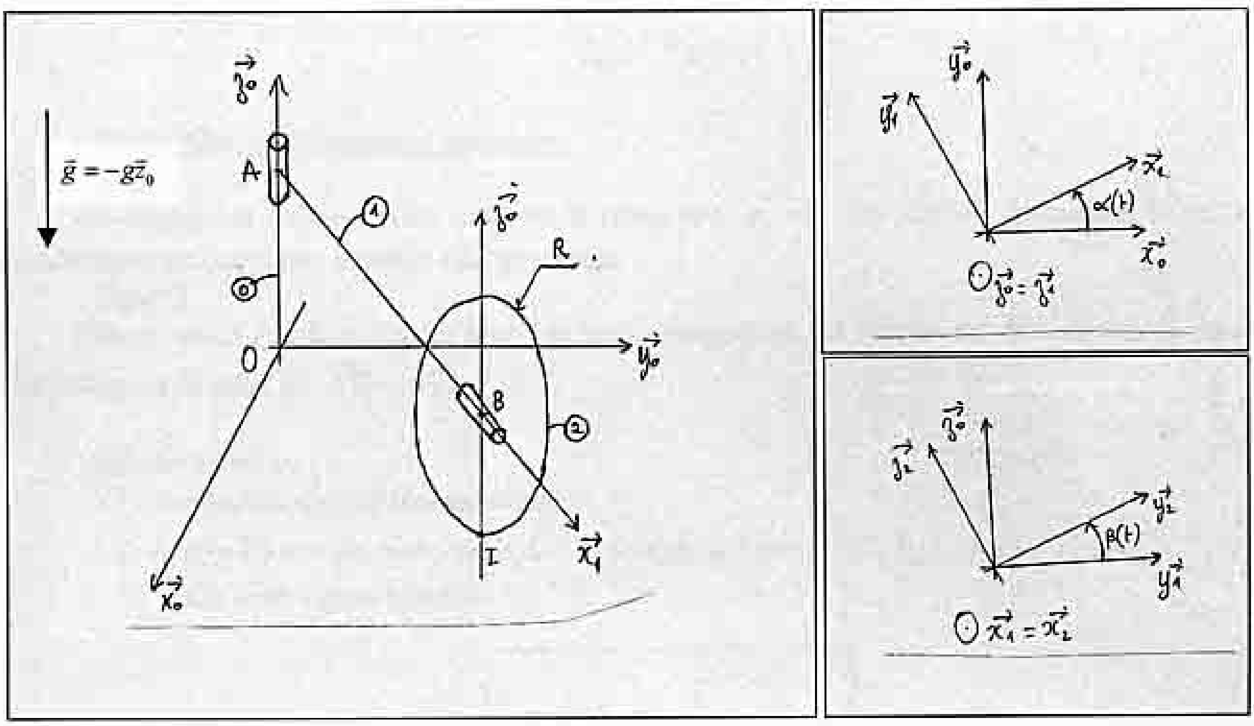
Final de PS25, Automne 2001
Sans documents ni calculatrices

Moulin à roue verticale

1)Description générale

Le moulin est composé d'une roue, 2, dont le plan est normal à $\vec{x}_1$ et d'un bras, 1. La roue 2 peut tourner et coulisser selon l'axe mobile $(A,\vec{x}_1)$. Le bras 1 peut tourner et coulisser selon l'axe fixe de R_0 $(O,\vec{z}_0)$. La roue est en contact avec le plan $\pi(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ au point I. Le repère R_0 est une bonne approximation de repère galiléen pour cette étude.



• Description cinématique

- La liaison entre 1 et 0 est un pivot glissant parfait, d'axe $(O,\vec{z}_0)$. On note $\overline{OA}=R\vec{z}_0$, ou R est le rayon de la roue 2. On paramètre l'attitude angulaire de 1/0 par le paramètre $\alpha(t)$.

- La liaison entre 2 et 1 est un pivot glissant parfait d'axe $(A,\vec{x}_1)$. On note $\overline{AB}=l(t)\vec{x}_1$. La rotation de 2/1 est paramétrée par $\beta(t)$.

- La liaison entre 2 et 0 est une liaison ponctuelle, caractérisée par le point I, et la normale au contact, $\vec{z}_0$.

- La configuration de référence est donnée à t=0:

$$\boxed{l=l_0, \dot{l}=0, \alpha=\alpha_0, \dot{\alpha}=0, \beta=\beta_0, \dot{\beta}=0}$$

a) Etude cinématique
Tracer le graphe de liaison

On demande d'exprimer les torseurs cinématiques suivants :

$[Tc\,1/0]$ *aux points A et B,*

$[Tc\,2/0]$ *aux points B puis I.*

a.1) Cas ou la liaison en I est parfaite

Vérifier que le paramétrage proposé prend bien en compte toutes les liaisons.

a.2) Cas ou la liaison en I n'est plus parfaite

Le roulement en I est sans glissement, ce qui se traduit par la condition supplémentaire :

$$\boxed{\vec{V}_{02}(I)=\vec{0}}.$$

Ecrire deux équations scalaires indépendantes traduisant cette condition de roulement sans glissement en I. En déduire le nombre de paramètres cinématiques indépendants. Montrer que la relation entre β et α s'écrit :

$$\boxed{l_0\,\dot{\alpha}+R\,\dot{\beta}=0}$$

• Description géométrique et massique

Bras 1

On néglige sa masse devant celle de la roue, soit $m_1=0$. On néglige également toutes les grandeurs cinétiques dans laquelle elle intervient.

Roue 2

Elle est assimilée à un disque sans épaisseur, homogène, de masse m_2. Son centre de masse coïncide avec le point B, $\overline{AB}=l(t)\,\vec{x}_1$.

b)*Déterminer :*

b.1) la symétrie de l'opérateur d'inertie,

b.2) la représentation matricielle de l'opérateur d'inertie $\bar{\bar{I}}(B,\vec{x}_1,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ et $\bar{\bar{I}}(B,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$.

On notera pour la suite :

$$\boxed{\bar{\bar{I}}(B,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)=\begin{bmatrix} C & 0 & 0\\ 0 & A & 0\\ 0 & 0 & A\end{bmatrix}}$$

et on demande de déterminer A et C en fonction des données.

• Modélisation des actions mécaniques

On note $\left[Ts_{ij}\right]$ le torseur représentant l'action du solide i sur le solide j.

c) Torseurs des actions mécaniques

c.1) Pesanteur

Donner l'expression en G_2=B du torseur de pesanteur sur 2.

c.2) Liaisons

Montrer que pour une liaison pivot glissant parfaite, d'axe $(M,\vec{b})$, le torseur des interactions s'écrit : $\left[Ts_{ij}\right]=\underset{\forall P\in(M,\vec{b})}{}\begin{cases}\vec{R}_{ij},\vec{R}_{ij}.\vec{b}=0\\ \vec{M}_{ij},\vec{M}_{ij}.\vec{b}=0\end{cases}$

Pour la liaison ponctuelle, imparfaite, on note

$$[Ts_{02}] = {}_I\begin{cases} \vec{R}_{02} = N\vec{z}_0 + T_1\vec{x}_1 + T_2\vec{y}_1 \\ \vec{M}_{02}(I) = A_r\vec{x}_1 + A_p\vec{z}_0 \end{cases}$$

- Indiquer en fonction du signe de $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ le signe des moments A_r et A_p pour que cette liaison soit dissipative,

- Donner l'inégalité à vérifier pour N, si la liaison est unilatérale.

On place entre 0 et 1, un moteur chargé d'animer le système. Le torseur d'action du à ce moteur sera noté :

$$[Ts_{01}\ du\ moteur] = {}_{\forall P}\begin{cases} \vec{R}_{01} = 0 \\ \vec{M}_{01}(P) = C_m\vec{z}_0 \end{cases}$$

2) Etude dynamique

Dans cette partie et pour toute la suite, on impose les liaisons cinématiques suivantes :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{V}_{01}(I) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} l = l_0 \\ l_0\dot{\alpha} + R\dot{\beta} = 0 \end{cases} \\ \dot{\alpha} = \omega = cte \end{cases}}$$

2.1 Bilan

Combien y a t- il d'inconnues ? Combien y a t' il d'équations ? Que peut on en conclure ?

Pour la suite, on considère donc que les moments $|A_r|$ et $|A_p|$ sont des constantes, données du problème. Le signe est déterminé en fonction de $\dot{\alpha}$ pour que la liaison soit dissipative.

2.2 Recherche de l'équation du mouvement

Le mouvement est imposé , $\dot{\alpha} = \omega = cte$, donc connu. L'équation du mouvement donnera la valeur du couple moteur Cm pour l'obtenir.

On exprimera les résultats en fonction de :

$$A, C, m_2, l_0, \alpha, \dot{\alpha}, A_r, A_p$$

a)par les théorèmes généraux

a.1) On demande de déterminer les torseurs cinétiques et dynamiques en B de 2/R0 :

$$C_B\{2/R_0\}\ et\ D_B\{2/R_0\} = \begin{cases} m_2\,\vec{\gamma}(B/R_0) \\ \vec{\delta}(B,/R_0) \end{cases}$$

a.2) On demande de déterminer les torseurs cinétiques et dynamiques en A de $\{1+2\}$/R0 :

$$C_A\{\{1+2\}/R_0\}\ et\ D_A\{\{1+2\}/R_0\}$$

On coupe la chaîne cinématique entre 0 et 2. Les inconnues de la liaison ponctuelle (N,T_1,T_2) seront considérées comme des inconnues intermédiaires. -(On rappelle ici que $|A_r|$ *et* $|A_p|$ sont des données)-

On demande :

a.3) *justifier brièvement la démarche ci-dessous puis,*

-Isoler 2 seul et écrire les équations suivantes, après les avoir justifiées:

$$\begin{cases} \vec{\delta}(B,2/R_0).\vec{x}_1 = \vec{M}_{\bar{2}\to 2}(B).\vec{x}_1 \\ m_2\,\vec{\gamma}(B,2/R_0).\vec{x}_1 = \vec{F}_{\bar{2}\to 2}.\vec{x}_1 \end{cases}$$

On note $\left\{\begin{matrix} \vec{F}_{\bar{2}\to 2} \\ \vec{M}_{\bar{2}\to 2}(B) \end{matrix}\right._B$ le torseur en B des efforts extérieurs à 2.

-isoler le système{1+2} et écrire les équations suivantes, après les avoir justifiées :

$$\begin{cases} \vec{\delta}(A,\{1+2\}/R_0).\vec{z}_0 = \vec{M}_{\overline{\{1+2\}}\to\{1+2\}}(A).\vec{z}_0 \\ m_2\,\vec{\gamma}(A/R_0).\vec{z}_0 = \vec{F}_{\overline{\{1+2\}}\to\{1+2\}}.\vec{z}_0 \end{cases}$$

On note $\left\{\begin{matrix} \vec{F}_{\overline{\{1+2\}}\to\{1+2\}} \\ \vec{M}_{\overline{\{1+2\}}\to\{1+2\}}(A) \end{matrix}\right._A$ le torseur en A des efforts extérieurs à $\{1+2\}$.

a.4) De ce système de quatre équations à quatre inconnues déduire :

-L'équation du mouvement donnant Cm,

-la valeur de N.

b) Par le théorème de l'énergie cinétique

déterminer pour le système {1+2} :

-l'énergie cinétique,
-l'énergie potentielle de pesanteur,
-la puissance des efforts extérieurs et intérieurs à {1+2} ,
-En déduire l'expression du théorème de l'énergie cinétique,
-commenter.