Calculatrice et fiches autorisées

Exercice 1 (4 points) : Ecrire la **négation** de chacune des propositions suivantes :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

b) $x < 2 \Rightarrow \exists\, n > 0 \;/\; x + n < 2$

Ecrire la **contraposée** de la proposition suivante :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Exercice 2 (3 points) : Soient A, B, C des sous ensembles d'un ensemble E.
Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$

Exercice 3 (7 points) : Soit la relation dans $\mathbb{Z}$: $a \,\Re\, b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod 4$ appelé « congruence modulo 4 » ou $a - b = 4k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

a) Montrer que c'est une relation d'équivalence
b) Donner la classe d'équivalence de 0 ? puis la classe d'équivalence de 1 ?
c) Combien y a-t-il de classes d'équivalence ?
d) Quel est l'ensemble quotient ?

Exercice 4 (6 points) : Soient trois ensembles E, F et G. On note f une application de E dans F, g une application de F dans G et h une application de G dans E.

Montrer que **si** hogof et gofoh sont des surjections et fohog est une injection **alors** f, g et h sont des bijections.

Exercice 5 (7 points) : Soit l'application $f : [0, 1[\cup]1, +\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

a) Montrer que cette application est injective ?
b) Est-ce que cette application est surjective (vous calculerez x en fonction de y).
c) Sur quel ensemble cette application est bijective ?

Exercice 6 (6 points) : On définit sur $\mathbb{R}$ deux lois de composition interne $\oplus$ et $\otimes$ commutatives et associatives

$a \oplus b = a + b + 2$
$a \otimes b = a + b - 1/2\; a b$

a) Montrer que $(\mathbb{R}, \oplus)$ est un groupe abélien ?
b) Sur quel ensemble avons-nous un groupe abélien pour la loi $\otimes$?

Exercice 7 (7 points) : On pose $F = \{ x \in \mathbb{R},\ \exists\, a, b \in \mathbb{Q} \;/\; x = a + b.\sqrt{2} \}$

Montrer que (F, + , x) est un **sous** corps commutatif de $(\mathbb{R}, +, \times)$?

+ est l'addition usuelle dans $\mathbb{R}$ et x est la multiplication usuelle dans $\mathbb{R}$