Une feuille A4 recto verso manuscrite est autorisée pour des formules et théorèmes.

Exercice 1 : Répondez Vrai ou Faux aux propositions suivantes (en justifiant et donnant éventuellement des exemples)

1) Si f et g sont deux applications de E dans E, alors $f \circ g = g \circ f$
2) Si f est une application de E dans F et B une partie de F, alors $f^{-1}(B) = \{ x \in E \,/\, \exists\, b \in B, \text{ tel que } x = f^{-1}(b) \}$
3) Soit f une application de E dans F
   a. f est injective $\Leftrightarrow$ $(\forall\, x, y \in E,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$ *écrire x_1 et x_2 au lieu de x et y*
   b. f est injective $\Leftrightarrow$ $(\forall\, x, y \in E,\ x = y \Rightarrow f(x) = f(y))$ *écrire x_1 et x_2 au lieu de x et y*
   c. f est surjective $\Leftrightarrow$ $f(E) = F$
4) Soient A, B deux sous ensembles d'un ensemble E
   a. $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
   b. $\overline{A} \Delta \overline{B} = A \Delta B$
5) Tout réel possède une racine carrée dans $\mathbb{C}$.
6) $\forall\, t > 1,\ t^2 > 1$

Exercice 2 : Soit E un ensemble.

1) Montrer que, pour toute partie A, B, C, D de E
$$\begin{cases} B \setminus C \subset A \\ C \setminus D \subset A \end{cases} \Rightarrow B \setminus D \subset A$$
2) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ (une partie de E). Prouver que la relation $\Re$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie par : $B \,\Re\, C \Leftrightarrow (B \Delta C) \subset A$ est une relation d'équivalence.

Exercice 3 : E étant un ensemble. Soient f et g deux applications de E dans E.
Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.

Exercice 4 : On définit sur $\mathbb{Z}$ une relation $\Re$:
$\forall\, x, y \in \mathbb{Z},\ x \,\Re\, y \Leftrightarrow x - y = 5.k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

1) Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence
2) Déterminer $\dot{0}$

Exercice 5 : Soit
$$f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$
$$x \mapsto \sin(x)$$

1) f est-elle injective, surjective, bijective (justifiez) ?
2) Déterminer un autre ensemble de départ tel que f soit une bijection.

Exercice 6 : Soit A une partie de E et l'application caractéristique $\varphi_A : E \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\varphi_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

1) Montrer que $\varphi_A^2 = \varphi_A$
2) Montrer que $\varphi_{A \Delta B} = (\varphi_A - \varphi_B)^2$

Exercice 7 : On pose $A = \{ x \in \mathbb{R},\ \exists\, a, b \in \mathbb{Q} \,/\, x = a + b.\sqrt{3} \}$
Montrer que (A , + , x) est un sous corps commutatif de ($\mathbb{R}$, + , x) ?
+ est l'addition usuelle dans $\mathbb{R}$ et x est la multiplication usuelle dans $\mathbb{R}$

Exercice 8 : Soit une application
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (u = x + y,\ v = x - y) \text{ avec } (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

1) (u , v) admet-il un antécédent par f ? le calculer ?
2) En déduire que f est bijective ?
3) Donner la fonction réciproque f^{-1}