

Final printemps 2006

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Chaque exercice doit être rédigé sur une feuille différente

Il sera tenu compte dans la correction de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 (6 points)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé.

i) Quelles sont les valeurs propres de A ? Pour quelles valeurs de a est-on sûr que A est diagonalisable à ce stade?

ii) Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres ci-dessus. Que peut-on en déduire?

iii) Diagonaliser ou trigonaliser A suivant la valeur de a (Donner P et D ou T telles que $A = PDP^{-1}$ ou $A = PTP^{-1}$).

Exercice 2 (6 points) (**NOUVELLE FEUILLE**)

On se propose d'intégrer sur l'intervalle contenu dans $]0, +\infty[$ le plus grand possible, l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1) Déterminer $a \in]0, +\infty[$ tel que $y_0(x) = ax$ soit solution particulière de (E).

2) Montrer que le changement de fonction inconnue $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ (avec $y_0(x)$ du 1) transforme l'équation (E) en l'équation différentielle

$$(E_1) \quad z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) \cdot z(x) = 1$$

(ne pas se préoccuper du cas $z(x) = 0$ et multiplier par $z(x)^2$ après avoir fait le changement de fonction).

3) Intégrer (E_1) sur $]0, +\infty[$.

4) Donner toutes les solutions de (E) définie sur $]0, +\infty[$.

TOURNER LA PAGE S.V.P.

Exercice 3 (6 points) (NOUVELLE FEUILLE) On se propose d'intégrer

$$I = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^{3x} + 2e^x + 2}{e^x(e^{2x} + 2)} dx.$$

- 1) En utilisant le changement de variables $u = e^x$, montrer que $I = \int_1^2 \frac{u^3 + 2u + 2}{u^2(u^2 + 2)} du$.
(justifier soigneusement)
- 2) Décomposer la fraction rationnelle apparaissant ci-dessus en éléments simples.
- 3) Calculer I .

Exercice 4 (6 points) (NOUVELLE FEUILLE)

On pose $\Omega = \mathbb{R}^2 / \{(0, 0)\}$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{x^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \in \Omega \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
- 2) Montrer que f est différentiable sur Ω et calculer sa différentielle.
- 3) Calculer, si elles existent, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

QUESTIONS SUPPLÉMENTAIRES (3 points) :

- 4) Calculer, si elles existent, les dérivées partielles secondes $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ et $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.