

## Médian MT11, Printemps 2008

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.

Le barème, donné à titre indicatif, est susceptible de modification. Les calculatrices sont interdites, aucun document n'est autorisé.

### Exercice 1 Calcul matriciel ( 7 points )

Dans tout l'exercice,  $I$  désigne  $I_3$  la matrice identité, et on considère les matrices suivantes de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définit aussi :  $S_0 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ , et pour tout entier naturel non nul  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} A^k$ .

1. Calculer  $L \times M$  et  $M \times L$ .
2. Calculer  $L^2$  et  $M^2$ . En déduire que  $L^n = 3^{n-1}L$  et  $M^n = 3^{n-1}M$  pour tout  $n \geq 2$ .
3. En remarquant que  $A = L - M$ , démontrer que pour tout entier naturel non nul  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$A^n = 3^{n-1}L - (-3)^{n-1}M.$$

4. Exprimer  $S_n$  en fonction de  $I, L, M$  et  $n$ .
5. On pose  $S = I - A$ .
  - a. Démontrer que  $S$  est inversible, et calculer  $S^{-1}$ .
  - b. En déduire que pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = S^{-1} \times (I - A^n)$ .

### Exercice 2 Nombres complexes ( 4 points )

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels, et  $z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$  un nombre complexe.

1. Montrer que  $z = 2 \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ .
2. Mettre  $z$  sous forme trigonométrique.
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . En calculant  $z^n$  de deux manières différentes, trouver la valeur de :

$$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \cos(k\alpha + (n-k)\beta).$$

**Exercice 3 Dérivation dans un anneau** ( 9 points )

Les parties A et B sont totalement indépendantes.  
Soient  $(A, +, \times)$  un anneau (qui n'est pas à priori supposé commutatif). On note  $0_A$  et  $1_A$  les éléments neutres additif et multiplicatif de  $A$ . Une application  $\delta : A \rightarrow A$  est appelée dérivation sur  $A$  lorsque pour tout  $x, y \in A$ , on a les relations :

$$\delta(x + y) = \delta(x) + \delta(y) \quad (1)$$

$$\delta(x \times y) = x \times \delta(y) + \delta(x) \times y \quad (2)$$

**Partie A : Crochet de Lie**

Pour  $a, b \in A$ , on pose  $[a, b] = a \times b - b \times a$ .

1. Que vaut  $[a, b]$  lorsque  $a$  et  $b$  commutent ?
2. On revient au cas général, et on se donne  $a, b, c$  dans  $A$ .
  - a. Former une relation liant  $[a, b]$  et  $[b, a]$ .
  - b. Montrer que  $[a, b + c] = [a, b] + [a, c]$ .
3. a. Pour  $a \in A$ , on considère  $d_a : A \rightarrow A$  l'application définie par  $d_a(x) = [a, x]$ . Montrer que  $d_a$  est une dérivation sur  $A$ .  
b. Dans cette question, on se place dans l'anneau  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Soient  $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , et  $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $d_a(b)$ .

**Partie B : Propriétés des dérivations**

Soit  $\delta$  une dérivation quelconque sur  $A$ .

1. En utilisant les relations (1) et (2), calculer  $\delta(0_A)$  et  $\delta(1_A)$ .
2. Soit  $x \in A$ .
  - a. Exprimer  $\delta(-x)$  en fonction de  $\delta(x)$ .
  - b. On suppose que  $x$  est inversible. Exprimer  $\delta(x^{-1})$  en fonction de  $\delta(x)$  et de  $x^{-1}$ .
3. a. Soient  $x, y, z \in A$ , calculer  $\delta(xyz)$  en fonction de  $x, y, z, \delta(x), \delta(y)$ , et  $\delta(z)$ .  
b. Soient  $x \in A$ . Calculer  $\delta(x^3)$ . Que devient cette formule lorsque  $x$  et  $\delta(x)$  commutent ?
4. Soit  $C_\delta = \{x \in A, \delta(x) = 0_A\}$ .
  - a. Montrer que  $C_\delta$  est un sous-anneau de  $(A, +, \times)$ .  
*Rappel : Pour montrer qu'un ensemble est un sous-anneau, il faut et il suffit de montrer que c'est un sous-groupe, et qu'il est stable par la multiplication.*
  - b. Montrer que si  $(A, +, \times)$  est un corps, alors  $C_\delta$  est un sous-corps de  $A$ .