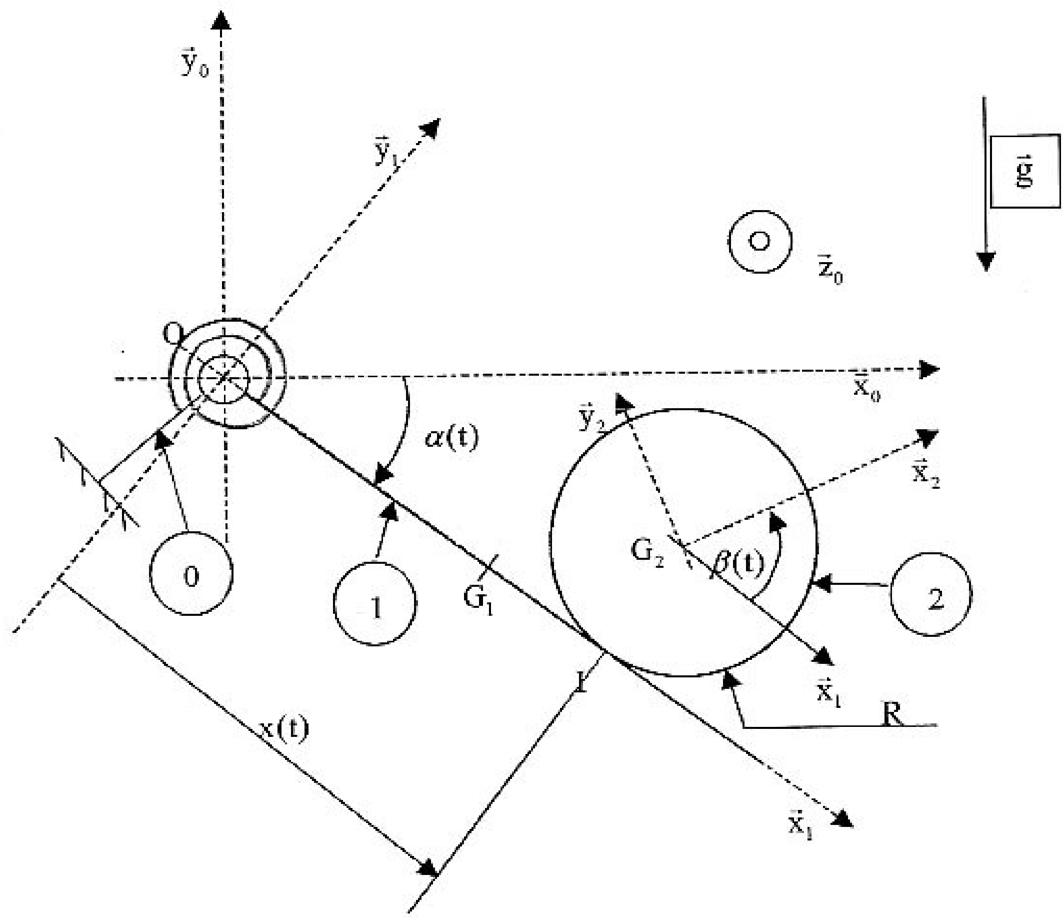
Automne 2002 — Examen Final de Ps25

Durée 2h, sans documents ni calculatrice



La figure ci-dessus schématise un problème plan. Le plan de représentation $(0,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ est un plan de symétrie du système. Le mécanisme proposé implique 3 solides, 0, 1, 2. Entre 0 et 1, on note la présence d'une liaison pivot. Entre 1 et 2 on a placé une liaison ponctuelle. Le référentiel $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est supposé galiléen.

I) Etude cinématique

I.1) Paramétrage

On associe au solide 1 le repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$, au solide 2 le repère $R_2(G_2,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_0)$.

En utilisant les éléments de paramétrage fournis sur la figure, dessiner les figures de changement de bases utiles et exprimer le vecteur $\overrightarrow{OG_2}$.

On note $\left[T_{cij}\right]$, le torseur cinématique du solide j dans son mouvement par rapport au repère R_i.

Exprimer les torseurs cinématiques $[T_{c01}]$,$[T_{c12}]$,$[T_{c02}]$ *par leurs éléments de réduction au point de votre choix.*

I.2) La configuration de référence, à l'instant t=0, est connue :

$$\begin{cases} \alpha(t=0) = \beta(t=0) = x(t=0) = 0 \\ \dot{\alpha}(t=0) = \dot{\beta}(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0 \end{cases}$$

On impose un roulement sans glissement au niveau de la liaison ponctuelle. *Ecrire l'équation de liaison cinématique qui en découle, puis préciser le nombre de paramètres cinématiques indépendants nécessaires à l'étude.*

II) Description géométrique et massique

II.1) Le solide 1 est une barre homogène de longueur 2a, de masse m_1. *Déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe* $(G_1, \vec{z}_0)$, *puis par rapport à l'axe* $(O, \vec{z}_0)$. On notera ce moment d'inertie, pour toute la suite, $I(O, \vec{z}_0) = C_1$.

II.2) Le solide 2 est un cerceau de rayon R, homogène, de masse m_2. *Déterminer le moment d'inertie de 2 par rapport à l'axe* $(G_2, \vec{z}_0)$. On notera pour toute la suite, $I(G_2, \vec{z}_0) = C_2$

III) Actions mécaniques

III.1) Pesanteur

L'accélération de la pesanteur $\vec{g}$, est dirigée selon $-\vec{y}_0$. *Donner les éléments de réductions des torseurs de pesanteur sur 1 et sur 2.*

III.2) Liaisons

On notera l'action mécanique de $i \rightarrow j$: $\left[T_{Sij}\right] = {}_P\begin{cases} \vec{R}_{ij} = X_{ij}\vec{x}_k + Y_{ij}\vec{y}_k + Z_{ij}\vec{z}_k \\ \vec{M}_{ij}(P) = L_{ij}\vec{x}_k + M_{ij}\vec{y}_k + N_{ij}\vec{z}_k \end{cases}$

La liaison pivot entre 0 et 1 est parfaite.

Exprimer le torseur cinématique de 1 dans son mouvement par rapport à 0, $\left[Tc_{01}\right]$, *puis celui des inter-efforts de la liaison parfaite,* $\left[Ts_{01}\right]$. *Entourer les composantes qui interviennent dans la modélisation du problème plan.*

On place un ressort de torsion, sans masse et linéaire entre 0 et 1. Il donne lieu à un torseur noté : $\left[Tr_{01}\right] = {}_O\begin{cases} \vec{R}_{01} = \vec{0} \\ \vec{M}_{01}(O) = -C_k \alpha \vec{z}_0 \end{cases}$. C_k est la raideur de torsion, constante.

Le roulement sans glissement entre 1 et 2 est obtenu de manière inconditionnelle. Il n'y a donc aucun test à effectuer sur les inconnues de liaison. Le torseur cinématique des mouvements relatifs compatibles avec la liaison entre 1 et 2 est donné par :

$Tc_{12} = {}_I\begin{cases} \vec{\Omega}_{12} \\ \vec{V}_{12}(I) = \vec{0} \end{cases}$. Cette liaison est parfaite.

Montrer que le torseur d'action mécanique s'écrit : $\left[Ts_{12}\right] = {}_I\begin{cases} \vec{R}_{12} & \text{quelconque} \\ & \vec{M}_{12}(I) = \vec{0} \end{cases}$.

IV) Recherche des équations du mouvement.

IV.1) Torseurs dynamiques

On note $\left[C_{ij}\right]$ le torseur cinétique du solide j par rapport au repère R_i.

En fonction des paramètres indépendants α *et* β *et de leurs dérivées, exprimer le torseur dynamique de 1 dans son mouvement par rapport à* R_0, $\left[D_{01}\right]$, *par ses éléments de réduction au point O.*

En fonction des paramètres indépendants α *et* β *et de leurs dérivées exprimer, le torseur dynamique de 2 dans son mouvement par rapport à* R_0, $\left[D_{02}\right]$ *par ses éléments de réduction au point* G_2 *puis en I et O.*

IV.2) La chaine cinématique est ouverte. *En exploitant les particularités des liaisons, que vous rappellerez rechercher les deux équations du mouvement plan de ce système.* Soyer précis et justifier point par point votre démarche.

V) Théorème de l'énergie cinétique.

On considère le système constitué des solides 1 et 2. En fonction des paramètres indépendants α et β et de leurs dérivées, on demande :

V.1) *déterminer l'énergie potentielle de pesanteur de ce système,*

V.2) *calculer la puissance associée à l'effort du au ressort de torsion entre 0 et 1. En déduire qu'on peut lui associer l'énergie potentielle :* $E_p = \frac{1}{2} C_k \alpha^2$,

V.3) *calculer l'énergie cinétique de ce système,*

V.4) sans effectuer la dérivation par rapport au temps ,*écrire l'équation induite par le théorème de l'énergie cinétique.*

Peut on dire que l'énergie mécanique de ce système se conserve ?