Examen Final PS26 : Electromagnétisme et optique ondulatoire
P2000 (mercredi 28 juin 2000), durée 2 heures

Calculette et documents interdits

Attention : Les 4 parties de l'examen sont indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque. Ne pas oublier de bien lire l'énoncé (évidence quelquefois nécessaire de rappeler) et essayer de répondre correctement à quelques questions plutôt que d'essayer de tout faire.

Conseil : A chaque fois que vous utiliserez une lettre (ou symbole) pour décrire une grandeur physique, il vous faudra écrire en toutes lettres ce que représente cette lettre (à l'exception, bien évidemment, des grandeurs physiques déjà désignées par une lettre dans l'énoncé).

Attention : des informations utiles pour tout le sujet de l'examen se trouvent à la fin de l'énoncé

Rappel : les réponses incohérentes (si vous écrivez des lignes qui se contredisent, par exemple) ou n'ayant pas la bonne dimension au sens physique du terme, seront pénalisées.

I. Questions de cours et applications simples (questions 1, 2, 3 indépendantes) (7 points)

1. Equations de Maxwell et propagation

1.a Donner l'expression des équations de Maxwell **dans le vide et loin des sources** dans le cas le plus général. Vous donnerez aussi les relations liant les potentiels aux champs associés.

1.b Donner les **noms et unités** (unité la plus simple possible et en S.I.) de **chacune des grandeurs** intervenant dans les équations précédentes (**Maxwell et potentiels**).

1.d Rappelez la condition de jauge de Lorentz et utilisez-la pour démontrer à partir des équations de Maxwell précédentes que le potentiel vecteur magnétique vérifie l'équation de propagation des ondes. Votre démonstration fera apparaître comment la vitesse de propagation de cette onde est reliée à des constantes fondamentales de l'électromagnétisme.

1.e Que deviennent les équations de Maxwell précédentes dans le cas où l'approximation des régimes quasi-permanents est valide. En quoi cela change t-il, ou pas, la possibilité d'avoir une propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide? Expliquez.

2. Ondes

Considérons une onde électromagnétique harmonique (fréquence f) se propageant dans le vide.

2.1 On dit que les ondes électromagnétiques sont transverses, qu'est-ce que cela signifie dans le cas général (pas nécessairement une onde plane, ni nécessairement une onde polarisée).

2.2 Qu'appelle t-on "onde sphérique" pour une onde électromagnétique? Donnez l'expression vectorielle en $M(r, \theta, \varphi)$ des vecteurs **E** (champ électrique), **B** (champ magnétique) et **R** (vecteur de Poynting) dans le cas d'une onde sphérique polarisée rectiligne suivant $\mathbf{e}_\theta$ (θ angle polaire classique des coordonnées sphériques) et se propageant dans le sens des distances r décroissantes par rapport à la source (placée à $r = 0$).

Vous donnerez votre réponse en fonction **uniquement** de c, f, fonction sinus, et de r, θ, φ, t, E_0 (amplitude de **E** à l'endroit que vous déciderez et préciserez dans l'espace à 3D), $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ et de constantes à préciser. Comme habituellement, on appelle ($\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$) le repère local en coordonnées sphériques.

3. Magnétostatique

3.1 Qu'appelle t-on "force de Laplace" (décrivez bien tous les termes utiles et illustrez votre réponse d'un dessin montrant toutes les grandeurs utiles).

3.2 Démontrer que la résultante des forces de Laplace est nulle lorsqu'une boucle conductrice, non déformable **(pas nécessairement circulaire)** parcourue par un courant continu est placée dans un champ **B** uniforme.

3.3 Dans le cas précédent (3.2), est-ce que notre boucle pourrait être animée d'un mouvement ? Expliquez.

II. Exercice : Etude d'un système de chauffage inductif pour prévenir le gel des conduites d'eau. (7 points)

1. Considérons un solénoïde droit (à base circulaire de rayon R), de longueur L contenant N spires (jointives, parallèles entre elles). Dans cette question, l'intérieur du solénoïde est le vide. Ce solénoïde est alimenté par un courant continu I. Donner le **sens, l'orientation** et la

norme du champ magnétique **B** à l'intérieur de ce solénoïde, **dessin clair nécessaire**. Vous considérerez l'approximation du solénoïde infini valide (soit L >>R). Illustrez votre réponse d'un dessin du circuit montrant les sens de **B**. Pas de démonstration demandée pour l'expression de la norme. Si vous ne connaissez pas le résultat, demandez de l'aide durant l'examen car ce résultat est utile pour la suite.

2. Le solénoïde est maintenant **(et pour la suite de l'exercice)** alimenté par un courant variable : $I = I_0 \sin \omega t$. Dessinez la courbe de la variation dans le temps de la (ou des) composante non-nulle de **B** en précisant bien ce que signifie une valeur positive de cette (ou ces) composante en terme d'orientation sur le dessin du circuit.

3. Le solénoïde précédent entoure maintenant un tuyau de cuivre (conducteur ohmique) de même axe, de rayon externe R et épaisseur e (voir figure et respectez les notations de cette figure). La perméabilité magnétique du cuivre est égale à celle du vide et on appelle γ sa conductivité électrique (on rappelle que l'on a la relation locale $\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}$ dans un conducteur ohmique entre le champ électrique **E** et le vecteur densité de courant **j**). Calculez le flux du champ magnétique **B** à travers la surface droite (= section) du tuyau de cuivre.

4. Le but de cette question est de trouver l'orientation des courants induits dans le tuyau de cuivre. Pour vous aider, calculez d'abord le flux du champ magnétique à travers une surface annulaire droite (axe = axe du tuyau) limitée par les rayons r et r+dr ($r < R$), voir figure. En appliquant la loi de Faraday, déduisez-en la fem induite sur un tour de cet anneau. A partir de cette fem vous devriez pouvoir en déduire l'orientation du champ électromoteur dans cet anneau. Le conducteur étant ohmique, quelle est alors **l'expression vectorielle** du vecteur densité de courant **j** en chaque point dans le cuivre ?

5. Quel est le sens du vecteur densité de courant induit à l'instant t = 0+ à un endroit donné dans le tuyau de cuivre (**dessin obligatoire**). Comment appelle t-on ce type d'induction (Neuman ou Lorentz, ou ni l'un ni l'autre) ?

6. Quelle est la puissance électrique instantanée dissipée par effet Joule dans le tuyau de cuivre de longueur L On rappelle que la puissance élémentaire dissipée dans un volume dV d'un conducteur ohmique est : $dP = \gamma E^2 dV$. Vérifiez que l'expression obtenue est bien celle d'une puissance.

7. Quelle est la puissance électrique moyenne (moyenne temporelle) P_{moy} dissipée par effet Joule dans le tuyau de longueur L?

8. A.N. f = 50 Hz, I_0= 5 A, N = 6000 tours, L = 3 m, R = 2 cm, e = 2 mm, $\gamma = 6\ 10^7$ S/m. Que vaut P_{moy} ?

III. Exercice : Electrostatique (6 points)

On considère deux plaques planes conductrices, infinies et parallèles. Ces plaques sont infinies dans les directions y et z et perpendiculaires à l'axe des x. La plaque de droite ($x = d > 0$) est au potentiel $V = V_0$ (négatif) et celle de gauche ($x = 0$) au potentiel $V = 0$ (voir figure).

1. Si le milieu entre les plaques est le vide, quelles sont les valeurs des densités surfaciques de charge σ_1 et σ_2 sur les surfaces des plaques en vis-à-vis (σ_1 pour la plaque $x = 0$). Vous exprimerez les résultats en fonction de d, V_0 et ε_0.

A partir de cette question, **et jusqu'à la fin de l'exercice**, le milieu entre les plaques n'est plus le vide mais un milieu diélectrique de constante diélectrique ε et chargé en volume avec la densité volumique de charge ρ **non-uniforme** donnée par :

$$\rho(x) = \frac{\rho_0 x}{d}$$

où ρ_0 est une constante positive.

2. Vous basant sur des considérations de symétrie, déterminez l'orientation du vecteur champ électrique entre $x = 0$ et $x = d$? Qu'en est-il, selon vous, du sens de **E** entre $x = 0$ et $x = d$?
3. En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss d'une part, et la relation entre potentiel et champ d'autre part, donner l'expression du champ électrique **E** et du potentiel V en tout point M(x, y, z) entre les plaques en fonction de d, V_0, ρ_0, ε et des coordonnées du point M.
4. En appliquant judicieusement le théorème de Gauss, exprimez la densité surfacique de charge σ_1 en fonction de d, V_0, ρ_0 et ε.
5. Utilisant le résultat précédent, exprimez la densité surfacique de charge σ_2 en fonction de d, V_0, ρ_0 et ε.
6. La loi de Coulomb est-elle vérifiée? Expliquez.

IV. Exercice : Ondes (4 points)

Soit une onde plane se propageant suivant l'axe des y croissants, harmonique, polarisée suivant x. Cette onde se propage dans un milieu non-magnétique et de permittivité diélectrique ε.

1. Donnez l'expression ***vectorielle*** des champs électrique **E** et magnétique **B** en tout point de l'espace M (x, y, z) en fonction de la fonction cosinus, des vecteurs de base, de l'amplitude B_o de **B**, de la fréquence f des constantes ε, μ_0 et des coordonnées de M et du temps t.

2. Comment orienter dans l'espace un capteur optique plan (ex. cellule photoélectrique sensible à l'intensité moyenne de l'onde EM) de forme carrée (côté a) pour que la puissance reçue de l'onde soit maximale. Que vaut cette puissance moyenne maximale dans ce cas?

3. Une antenne constituée d'un fil conducteur parfait, ayant la forme d'un cadre carré (côté a) quasiment fermé est placée de façon à recueillir le plus de signal en volts aux extrémités du cadre. Comment orienter l'antenne dans l'espace pour obtenir ce maximum de signal? Que vaut l'amplitude de ce signal maximum?

Informations pouvant être utiles (f scalaire, **U** vecteur):

rot grad f = **0**
div **rot U** = 0
ΔU = **grad** div **U** - **rot rot U**
Δf = div **grad** f   où Δf est le Laplacien de f.

Coordonnées cartésiennes, coordonnées (x, y z) repère local (**e**$_x$,**e**$_y$, **e**$_z$)

$$\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$div\,\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

Coordonnées cylindriques, coordonnées (ρ, θ, z) repère local (**e**$_\rho$,**e**$_\theta$, **e**$_z$)

$$\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$div\,\vec{u} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho u_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{u} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\right]\vec{e}_\rho + \left[\frac{\partial u_\rho}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial \rho}\right]\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho u_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}\right]\vec{e}_z$$

Coordonnées sphériques (r, θ, φ) et repère local (**e**$_r$,**e**$_\theta$, **e**$_\varphi$)

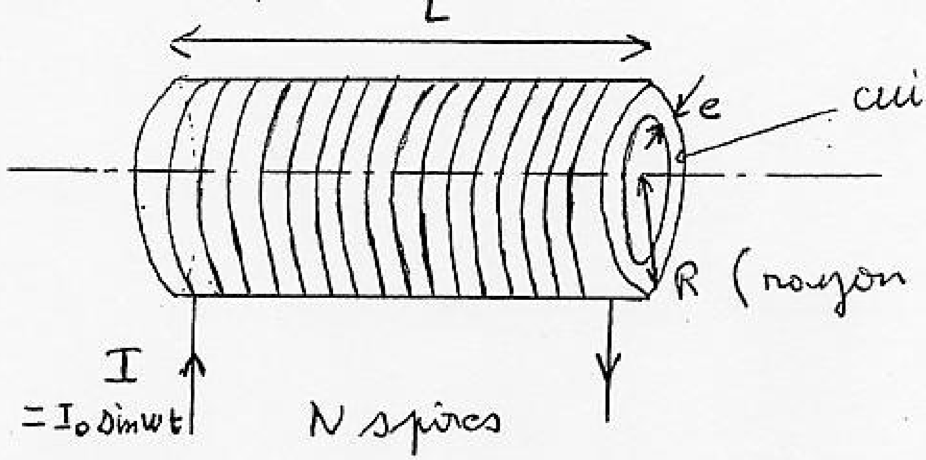
$$\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

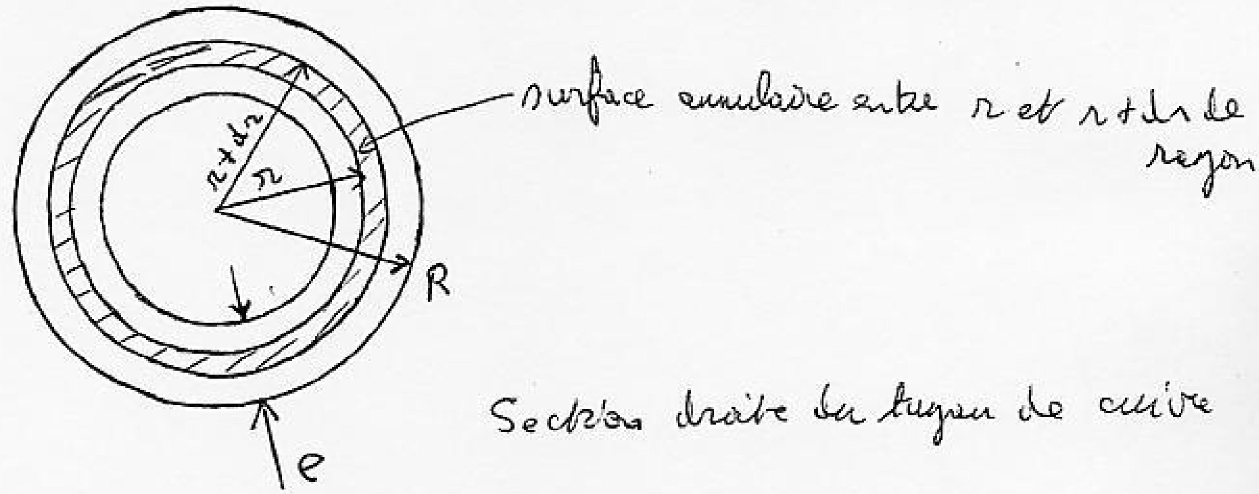
$$div\,\vec{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, u_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{u} = \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, u_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}\right]\vec{e}_r + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r u_\varphi)}{\partial r}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right]\vec{e}_\varphi\right.$$

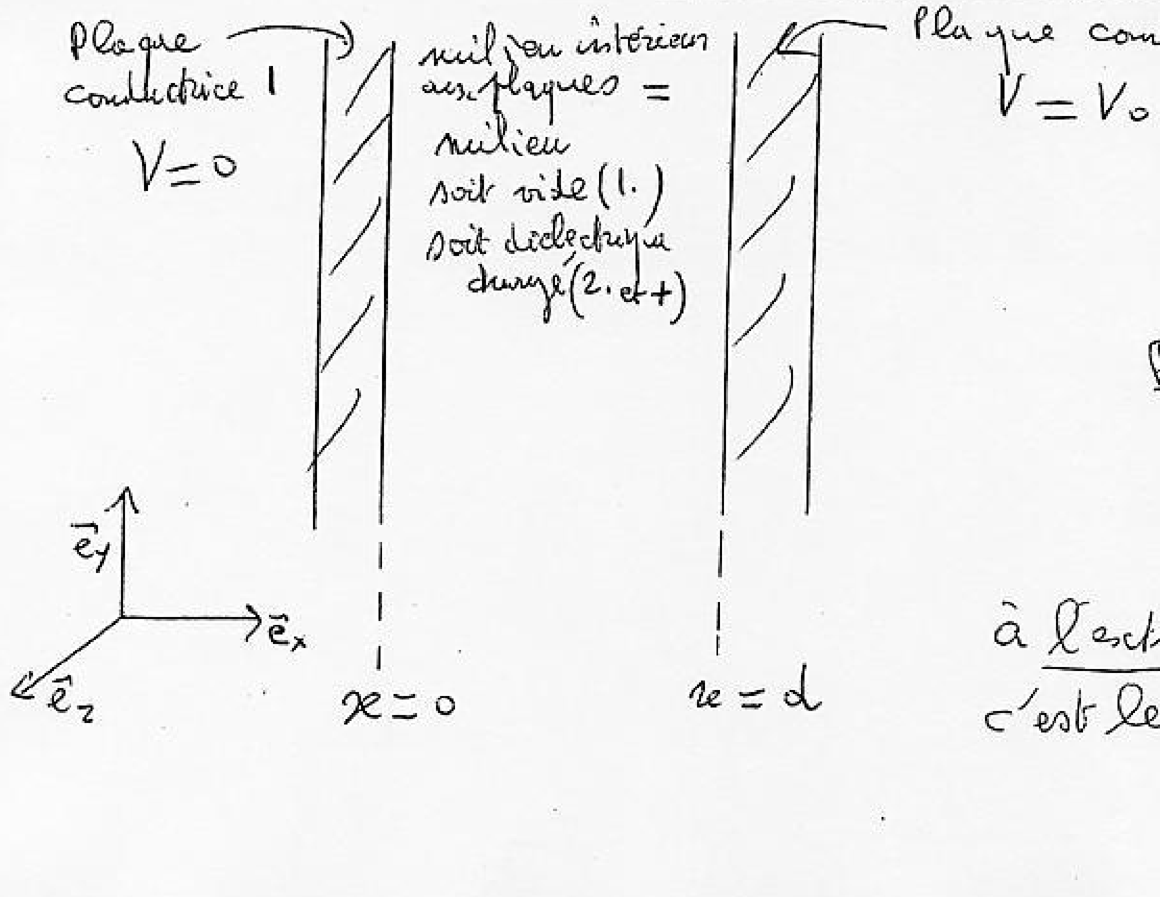
Pour toute application numérique prendre π = 3

Ex. II : chauffage inductif





Section droite du tuyau de cuivre



Ex : III

Electrostatique

à l'extérieur des plaques c'est le vide.