Final PS26 – Semestre P2004

Questions de cours

I. Equations de Maxwell

Les questions sont indépendantes entre elles. Si vous ne pouvez répondre à la question 1, vous pourrez demander la réponse à l'enseignant et continuer à répondre aux questions 2 et 3. Il en sera cependant tenu compte dans la notation.

1. Soit un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope du point de vue des propriétés électriques de la matière. Ce milieu a la même perméabilité magnétique que le vide.

1.a Donnez les équations de Maxwell dans ce milieu dans le cas le plus général. Précisez les noms, unités et valeurs (si constantes) de toutes les grandeurs présentes dans ces équations de Maxwell.
1.b Donnez la relation entre le champ électrique et le potentiel associé. Même question pour le champ magnétique.

Les questions suivantes sont indépendantes entre elles

2 . On reste dans le même milieu qu'à la question 1
2.1 A partir des équations de Maxwell, montrez que le champ magnétique respecte l'équation d'onde (**avec un terme source à préciser**) prouvant que le champ magnétique se propage.
2.2 Quelle hypothèse faudrait-il faire (en plus des équations de Maxwell) pour que le potentiel scalaire V puisse aussi se propager comme une onde. On demande ici de trouver une relation à imposer liant les potentiels V et **A** afin que V puisse se propager.

3. On reste dans le même milieu qu'à la question 1 mais on considère maintenant valide l'approximation des régimes quasi-permanents (ARQP).

3.1 Que deviennent les équations de Maxwell dans ce cas ?
3.2 Donnez l'équivalent intégral de ces équations de Maxwell (autrement dit précisez leur sens physique). Bien préciser les surfaces, les courbes et les orientations. Des dessins sont requis pour cette question.
3.3 Quelles sont la (ou les) source(s) du champ magnétique ? Quelles sont la (ou les) source(s) du champ électrique ?

II . Structure et dimension des champs électrostatique et magnétostatique

Pour cette question on se place en régime statique (**E** et **B** indépendants du temps et créés par des sources indépendantes du temps)
On considère les relations suivantes :

E : vecteur champ électrique
B : vecteur champ magnétique

(x, y, z) : système de coordonnées spatiales cartésiennes, avec le repère local associé : $(\mathbf{u_x}, \mathbf{u_y}, \mathbf{u_z})$

(r, θ, φ) : système de coordonnées spatiales sphériques, avec le repère local associé : $(\mathbf{u_r}, \mathbf{u_\theta}, \mathbf{u_\varphi})$

(ρ, φ, z) : système de coordonnées spatiales cylindriques, avec le repère local associé : $(\mathbf{u_\rho}, \mathbf{u_\varphi}, \mathbf{u_z})$

dl : élément de longueur (une fois intégré dl devient L)
dS : élément de surface (une fois intégrée dS devient S)
dV : élément de volume (une fois intégré dV devient V)
Q : charge électrique ponctuelle (non nulle)
i : courant (modèle dimension 1) non nul
λ : densité linéique de charge
σ : densité surfacique de charge
ρ' : densité volumique de charge (**attention :** ici notée ρ' pour éviter la confusion avec ρ coordonnée radiale en cylindriques)
ε_0, μ_0 : constantes bien connues pour le vide

Les expressions suivantes sont-elles possibles (en termes de dimensions et en termes de structure des champs vectoriels) ? Attention, on ne demande pas quelles sont les sources qui créent les champs mais seulement si la réponse trouvée est possible physiquement ou impossible physiquement.

Répondez par oui (possible) ou non et **dans tous les cas justifiez votre réponse**

a) $\mathbf{E} = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)\, \mathbf{u_r}$
b) $\mathbf{E} = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)\, \mathbf{u_\varphi}$
c) $\mathbf{B} = \varepsilon_0\, i\, \mathbf{u_z}$
d) $\mathbf{B} = \mu_0\, i\, \mathbf{u_z}$
e) circulation fermée de **E** le long d'un cercle de rayon $R = Q/(4\pi\varepsilon_0 R)$
f) flux de **B** à travers un rectangle = 0
g) flux de **E** à travers une sphère = 0
h) flux de **B** à travers une sphère = μ_0 i L
i) $\mathbf{E} = \sigma/\varepsilon_0\, \mathbf{u_z}$
j) div $\mathbf{E} = \rho' / \varepsilon_0\, \mathbf{u_r}$
k) $\mathbf{rot\, B} = \mu_0\, i/S\, \mathbf{u_z}$

Exercices

Exercice 1 : ondes électromagnétiques

Une onde EM plane, harmonique (on choisira la fonction sinus), polarisée suivant Y se propage dans le vide suivant la direction des z décroissants. L'amplitude B_0 de la norme du champ magnétique est de 1 Tesla et la fréquence f de l'onde est $3\ 10^{14}$ Hz.

1. Donnez l'expression vectorielle du champ **B** en fonction des données du problème et en fonction de constantes à définir.

2. Mêmes questions pour le champ électrique associé **E**.
3. On rappelle que le vecteur de Poynting vaut $\mathbf{R} = 1/\mu_0\ \mathbf{E}\wedge\mathbf{B}$, donnez l'expression vectorielle de **R**.
4. Considérant que cette onde arrive avec une incidence normale en z = -10 m sur du verre d'indice de réfraction n = 1,5 et que seule 90% de l'énergie incidente passe dans le verre quelle est l'expression du vecteur de Poynting dans le verre en fonction de l'amplitude de sa norme R_0 dans le vide?
5. Quelle est la fréquence de l'onde EM dans le verre ?
6. Quelle est la vitesse de l'onde dans le verre ? Quelle est la vitesse de l'onde dans le vide ?
7. Quelle est sa longueur d'onde dans le verre ? Est-ce du domaine visible ? Sinon qu'est-ce ?
8. Quelle est sa longueur d'onde dans le vide ? Est-ce du domaine visible ? Sinon qu'est-ce ?

Exercice 2 : magnétostatique (sources de courant continues)

1. Soit un fil droit infini rectiligne (axe Oz) et parcouru d'un courant i continu (modèle à une dimension de la distribution de courant)

1.1Calculer par la loi de Biot et Savart le champ magnétique créé par ce fil en tout point de l'espace. Que vaut-il sur le fil ici supposé de dimension 1?

1.2 Calculer par le théorème d'Ampère le champ magnétique créé par le fil en tout point de l'espace.

2. Tout en conservant un fil droit rectiligne infini, on considère maintenant que celui-ci est alimenté avec une densité de courant j (norme du vecteur densité de courant $\mathbf{j} = j\ \mathbf{u}_z$) uniforme sur la section S du fil qui est constante en tout point du fil infini. Le fil est donc maintenant modélisé en dimension 3.

2.1 Par le théorème d'Ampère, après avoir soigneusement examiné les symétries du problème, donner l'expression du champ magnétique en tout point de l'espace intérieur au fil et extérieur au fil.

2.2 Vérifier la loi de Maxwell-Ampère en tout point intérieur et extérieur au fil.

2.3 Application numérique : S = 1 cm^2, courant total traversant une section S du fil = 5 A, que vaut la norme du champ **B** à 1 mètre de l'axe Oz.

3. On considère un câble co-axial (voir dessin) formé de deux conducteurs co-axiaux isolés électriquement l'un de l'autre avec un courant i circulant dans le sens de l'axe Oz (pour le conducteur central) et un courant –i circulant dans le sens opposé (pour le conducteur externe). On suppose que la densité de courant est uniforme dans chacun des fils, elle peut cependant être différente pour les deux conducteurs.

Que vaut le champ magnétique à l'intérieur de chacun des conducteurs et à l'extérieur du câble co-axial. Voyez-vous un intérêt particulier à ce type de câble ?

Exercice 3 : électrostatique

Soit une plaque plane P, d'épaisseur constante e (suivant la direction Oz) et infinie suivant ses deux autres dimensions.
Le matériau de cette plaque est a priori quelconque.

1. Cette plaque est chargée sur sa surface interne à gauche uniformément avec la densité surfacique de charge $\sigma 1$ et à droite uniformément avec la densité surfacique de charge $\sigma 2$. Quelle est le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de cette plaque (ici non chargée en volume). Dans quel(s) cas cette plaque pourrait-elle représenter la distribution des charges sur un conducteur ?
2. Mêmes questions que précédemment mais la plaque est maintenant chargée en volume (et uniquement en volume) avec la densité volumique de charge ρ = cte. Conseil, il vous faudra d'une part appliquer rigoureusement le théorème de Gauss. D'autre part, il faut aussi pour résoudre le problème remarquer qu'en $z = e/2$ le champ électrique est.
3. Mêmes questions mais maintenant ρ varie linéairement avec la position x suivant l'épaisseur de 0 à $\rho 0$ (positif) au milieu de la plaque puis de $\rho 0$ à 0. Déduisez-en le potentiel en tout point de l'espace. Dans ce dernier cas, calculez le potentiel V en tout point de l'espace et tracez l'évolution de celui-ci avec les coordonnées (x, y,z) de l'espace lorsque $\sigma 1 < 0$ et $\sigma 2 = -\sigma 1$.

<u>Exercice 4 : induction</u>

Soit un fil rectiligne infini (axe Oz) parcouru d'un courant continu I et un cadre rectangulaire (ABCD) qui n'est connecté à aucun générateur. Pour les 4 premières questions le fil est dans le plan du cadre et le cadre est poussé par l'expérimentateur à une vitesse **V** par rapport au fil. Le cadre va de la gauche vers la droite (en se rapprochant du fil, voir dessin).

1. Par la loi de Faraday, trouvez valeur et sens de la force électromotrice induite (fem) dans le cadre rectangulaire.
2. Pouvez-vous retrouver ce résultat par une autre méthode que la loi de Faraday. Si oui, faites-le. Sinon, passez à la question suivante.
3. vérifier que le sens de la fem induite est conforme à ce que nous apprend la loi de Lenz. Soyez rigoureux dans votre explication.
4. Si on suppose que le cadre est poussé à une vitesse constant, est-ce que l'action de l'expérimentateur est facilitée ou ralentie par la force de Laplace ? Donnez l'expression de celle-ci pour le cadre (le fil rectiligne est supposé immobile)

On oublie maintenant le cadre rectangulaire, il n'existe plus, pschitt disparu !

5. Que vaudrait la force électromotrice induite si le cadre était remplacé par une spire circulaire plane de rayon R (connectée à aucun générateur) se déplaçant à la même vitesse V. Donnez le résultat en appliquant les deux méthodes possibles.
6. Que se passerait-il si le fil n'était plus placé dans le plan de la spire circulaire plane et qu'en plus la spire n'était plus poussée vers le fil par l'expérimentateur (il n'intervient plus du tout sur le mouvement de la spire).
7. Même question que 6. mais maintenant la spire immobile est alimentée par une fem externe E.

Mathématiques utiles avec f champ scalaire et **U** champ vectoriel

Coordonnées cartésiennes habituelles (x, y, z) : ($\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$) repère local (coord. cartésiennes) attaché en M(x, y, z) et **U** ($\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$) dans ce repère local.

$$\mathbf{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

$$div\mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\mathbf{rotu} = (\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z})\mathbf{e}_x + (\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x})\mathbf{e}_y + (\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y})\mathbf{e}_z$$

Coordonnées cylindriques habituelles (ρ, φ, z) : ($\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$) repère local (coord. cylindriques) attaché en M(ρ, φ, z) et **U** ($\mathbf{u}_\rho$, $\mathbf{u}_\varphi$, $\mathbf{u}_z$) dans ce repère local.

$$\mathbf{grad}f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

$$div\mathbf{u} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho u_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\mathbf{rotu} = (\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial z})\mathbf{e}_\rho + (\frac{\partial u_\rho}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial \rho})\mathbf{e}_\varphi + (\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho u_\varphi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi})\mathbf{e}_z$$

Coordonnées sphériques habituelles (r,θ, φ) : ($\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$) repère local (coord. sphériques) attaché en M (r, θ, φ) et **U** ($\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$, $\mathbf{u}_\varphi$) dans ce repère local.

$$\mathbf{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

$$div\mathbf{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\mathbf{rotu} = [\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, u_\varphi) - \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi})]\mathbf{e}_r + [\frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r u_\varphi)]\mathbf{e}_\theta$$
$$+ [\frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta})]\mathbf{e}_\varphi$$