

Examen Final
(durée: 2 heures)

Exercice 1

Soit f une fonction définie par un nuage de $(n+1)$ points $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$. On cherche à déterminer son polynôme d'interpolation $P_n(x)$ de degré n , qui passe par ces points en utilisant la méthode de Newton.

1. Donner l'expression de la différence divisée d'ordre n de la fonction $f(x)$. Que représente-t-elle pour le polynôme d'interpolation $P_n(x)$.

2. Dans le cas de trois points d'interpolation, montrer que l'on a la relation suivante entre les différences divisées:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}.$$

3. Donner la relation de récurrence entre le polynôme $P_n(x)$ et le polynôme $P_{n-1}(x)$ de degré $(n-1)$ passant par les n premiers points. Quelle est la valeur de $P_0(x)$.

Exercice 2

Etant donnés les polynômes de Legendre définis par :

$$L_0(x) = 1, L_1(x) = x, \dots, L_k(x) = \frac{2k-1}{k} x L_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k} L_{k-2}(x), \quad k = 2, 3, \dots$$

On veut établir la formule d'intégration numérique suivante :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A_1 \cdot f(x_1) + A_2 \cdot f(x_2) + A_3 \cdot f(x_3) \quad (1)$$

où A_1, A_2, A_3 sont des réels à déterminer et x_1, x_2, x_3 sont les racines du polynôme $L_3(x)$.

1. Calculer x_1, x_2, x_3 , puis déterminer les constantes A_1, A_2, A_3 de telle sorte que la formule d'intégration (1) soit exacte pour tout polynôme de degré ≤ 2 .
2. Quel est le degré de précision de la formule d'intégration (1).
3. Par un changement de variable convenable, construire à partir de la formule d'intégration (1), une deuxième formule pour calculer l'intégrale de f sur un intervalle $[a, b]$ quelconque.
4. En utilisant cette deuxième formule, calculer une valeur approchée de l'intégrale sur $[0, 1]$ de la fonction $f(x) = x \exp(-x)$. Calculer la valeur exacte de cette intégrale puis donner l'erreur absolue commise.
5. On veut utiliser maintenant la formule de Simpson composée pour calculer cette intégrale, pour cela on divise l'intervalle $[0, 1]$ en n sous intervalles égaux de longueur h . Quelle valeur minimale doit-on donner à n pour avoir une erreur d'intégration inférieure ou égale à celle obtenue en 4°).

Exercice 3

Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{y(x)}{x} - 3x + 2, & \forall x \in [1, +\infty[\\ y(1) = 2. \end{cases}$$

que l'on cherche à résoudre numériquement en utilisant l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 en prenant un pas d'intégration $h = 0.1$.

1. Déterminer la solution exacte $y_{ex}(x)$ de cette équation différentielle et calculer ses valeurs $y_{ex}(x_i)$ pour $i = 1$ et $i = 2$, sachant que $x_0 = 1$.
2. Ecrire et appliquer l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 pour déterminer les valeurs approchées de la solution $y_i = y(x_i)$ pour $i = 1$ et $i = 2$. Comparer ces valeurs approchées avec les valeurs de la solution exacte.