MN42 : ANALYSE NUMERIQUE ET SIMULATION

UTBM - GESC
Semestre d'Automne 2008
(06/11/08)

Examen Médian

(durée: 2 heures)

Exercice 1

Soit à résoudre le système linéaire (S) : $A.\underline{x} = \underline{b}$
avec

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 14 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

1. On cherche à résoudre ce système en utilisant une décomposition de la matrice A sous la forme du produit : $A = L.U$ où L et U sont des matrices triangulaires inférieure et supérieure respectivement, et de la forme

$$L = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ l_1 & \alpha_2 & 0 \\ l_2 & l_3 & \alpha_3 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & u_2 \\ 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   a- Déterminer les coefficients des matrices L et U.

   b- Calculer le vecteur solution du système (S).

2. Résoudre le système $A^2.\underline{x} = \underline{b}$ sans calculer A^2.

Exercice 2

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x-1}{x} - \exp(-x)$.

1. Tracer l'allure du graphe de f, puis en déduire que l'équation $f(x) = 0$ possède une racine a_1 négative et une racine a_2 positive. Localiser chacune de ces deux racines entre deux entiers successifs.

2. Pour déterminer ces racines, on utilise dans un premier temps la méthode du point fixe. Pour celà on propose les deux algorithmes suivants :

   - $x^{(k+1)} = g_1(x^k)$, avec $g_1(x) = 1 + x\,\exp(-x)$
   - $x^{(k+1)} = g_2(x^k)$, avec $g_2(x) = (x-1)\,\exp(x)$

   a- Vérifier que les points fixes de ces algorithmes sont des racines de l'équation $f(x) = 0$ puis étudier leur convergence. S'il y'a convergence, dites vers quelle racine et quel est son ordre.

   b- Donner une approximation, à 10^{-5} près, de la racine a_2 en initialisant les itérations par $x^{(0)} = 2$.

3. On utilise maintenant la méthode de Newton pour déterminer une approximation de la racine a_2.

   a- Ecrire le processus itératif de Newton pour la fonction f et donner son ordre de convergence vers la racine a_2.

   b- Donner une approximation, à 10^{-5} près, de la racine a_2 en initialisant les itérations par $x^{(0)} = 2$. Que se passe-t-il si les itérations sont initialisées par $x^{(0)} = 3$.

   c- Pour que le processus de Newton converge vers la racine a_2, il doit être initialisé dans un intervalle $]0, \alpha[$. Déterminer l'équation donnant le paramètre α.

.../...

4. On se propose maintenant d'utiliser une variante de la méthode de Newton définie par le processus itératif suivant:

$$x^{(k+1)} = x^k - \frac{(f(x^k))^2}{f(x^k + f(x^k)) - f(x^k)}$$

   a- Donner une approximation, à 10^{-5} près, de la racine a_2 en initialisant les itérations de ce processus par $x^{(0)} = 2$.

   b- Quelle est l'ordre de convergence de cette nouvelle méthode.