BTS INFORMATIQUE DE GESTION

SESSION 2003

EF2 : MATHÉMATIQUES II

Durée : 1 heure **Coefficient : 1**

ÉPREUVE FACULTATIVE

Le (la) candidat (e) doit traiter tous les exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices est autorisé.

Le formulaire officiel de mathématique est joint au sujet.

EXERCICE N° 1 (10 points)

Un technicien a été chargé d'étudier le fonctionnement d'un certain type A de pièces. Après mesure de la durée de vie d'un certain nombre de ces pièces, il en est arrivé à la conclusion que la variable aléatoire qui à chaque pièce de type A associe sa durée de vie en jours suit une loi exponentielle dont la MTBF est égale à 145.

1) Calculer le paramètre de cette loi, arrondi à 10^{-4} près.

2) On admet dans cette question que le paramètre de la loi vaut : $\lambda = 0{,}007$

On écrira pour les calculs demandés dans les questions 2)a) , 2)b) et 3)b) les valeurs approchées sous leur forme décimale arrondie à 10^{-3} près.

a) Calculer la probabilité qu'une pièce de type A soit en panne au bout de 200 jours.
b) Calculer la probabilité qu'une pièce de ce type soit encore en fonctionnement au bout de 500 jours.
c) Déterminer, arrondi à 1 jour près, le temps de bon fonctionnement avec une fiabilité égale à 0,8.

3) On considère deux pièces de type A fonctionnant de façon indépendante.

a) Déterminer la fiabilité du système obtenu en montant ces deux pièces en série.
b) Calculer la probabilité que ce système fonctionne au moins 150 jours.

EXERCICE N° 2 **(10 points)**

1) On considère l'équation différentielle (E) :

$$xy'+\left(2x+1\right)y=-6, \qquad x\in \ ]\,0\,;+\infty\,[.$$

a) Trouver une solution particulière f de (E) sous la forme $f(x)=\dfrac{a}{x}$, où a est une constante réelle à déterminer.

b) Résoudre l'équation différentielle $xy'+\left(2x+1\right)y=0$, sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

c) En déduire les solutions de (E) .

2) Soit g la fonction définie par $g\left(x\right)=\dfrac{3\mathrm{e}^{-2x}-3}{x}$, $\qquad x\in \ ]\,0\,;+\infty\,[.$

a) Donner le développement limité d'ordre 2 de e^{-2x} au voisinage de 0. En déduire le développement limité d'ordre 1 de $g(x)$ au voisinage de 0.

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

CORRIGE DU SUJET : B BTS INFORMATIQUE DE GESTION SESSION 2003 EPREUVE DE MATHEMATIQUES EF2			
	Question	Correction	Barème proposé

Exercice I			
	1)	Le paramètre λ de cette loi est donné par : $\lambda = \frac{1}{MTBF} = \frac{1}{145} = 0,0069$ valeur approchée arrondie à 10^{-4} près.	1
	2)a)	La fonction R de fiabilité est donnée par : $R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{-0,007t}$, $t \geq 0$. La probabilité demandée est égale à : $1 - R(200) = 1 - \mathrm{e}^{-0,007\times 200} = 1 - \mathrm{e}^{-1,4} = 0,753$ valeur approchée arrondie à 10^{-3} près.	2
	2)b)	La probabilité pour qu'une pièce soit encore en fonctionnement au bout de 500 jours est égale à : $R(500) = \mathrm{e}^{-0,007\times 500} = \mathrm{e}^{-3,5} = 0,030$ valeur approchée arrondie à 10^{-3} près.	2
	2)c)	On cherche t tel que : $R(t) = 0,8$. $\mathrm{e}^{-0,007\times t} = 0,8 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 0,8}{-0,007} = \frac{1000}{7}\ln 1,25$. On trouve : $t = 31,9$ en arrondissant à 10^{-1} près. Le temps de bon fonctionnement avec une fiabilité égale à 0,8 est : 32 jours.	2
	3)a)	La fonction de fiabilité d'un système composé de plusieurs pièces est le produit des fonctions de fiabilité correspondantes. La fiabilité du nouveau système, obtenu à partir de deux pièces montées en série est donc la fonction : $t \rightarrow R_2(t) = \left[R(t)\right]^2 = \mathrm{e}^{-0,014t}$.	2
	3)b)	La probabilité que ce montage en série fonctionne encore au bout de 150 jours est égal à : $R_2(150) = \mathrm{e}^{-0,014\times 150} = \mathrm{e}^{-2,1} = 0,122$ valeur approchée arrondie à 10^{-3} près.	1
Exercice II			
	1)a)	Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{a}{x}$ pour $x > 0$. f est une solution de (E) $\Leftrightarrow x\frac{-a}{x^2} + (2x+1)\frac{a}{x} = -6 \Leftrightarrow 2a = -6 \Leftrightarrow a = -3$. La fonction $f : x \rightarrow \frac{-3}{x}$, pour $x > 0$, est une solution de (E)	2
	1)b)	Soit (H) l'équation différentielle : $xy' + (2x+1)y = 0$, $x > 0$. y est solution de $(H) \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{2x+1}{x} = -2 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln\left\|\frac{y}{k}\right\| = -2x - \ln x \Leftrightarrow y = \frac{k}{x}\mathrm{e}^{-2x}$. La solution générale de l'équation (H) est donc de la forme : $y_H = y = \frac{k}{x}\mathrm{e}^{-2x}$, $x > 0$, k étant une constante réelle arbitraire.	2
	1)c)	La solution générale de (E) est la somme de l'équation générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation complète. La solution générale de (E) est donc la fonction définie, sur l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$, par : $f(x) = \frac{k}{x}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{3}{x}$, k Î ¡ ou encore $f(x) = \frac{k\,\mathrm{e}^{-2x} - 3}{x}$, k Î ¡ .	2

	2)a)	On a : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, donc : $e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$. On en déduit : $g(x) = \frac{3e^{-2x} - 3}{x} = \frac{3 - 6x + 6x^2 - 3 + 3x^2\varepsilon_1(x)}{x} = -6 + 6x + 3x\varepsilon_1(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$. Le développement limité, d'ordre1, au voisinage de 0, de la fonction g est donc : $\frac{3e^{-2x} - 3}{x} = -6 + 6x + x\varepsilon_2(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$.	2 1
	2)b)	Comme $\lim\limits_{x\to 0} -6 + 6x + x\varepsilon_2(x) = -6$, alors $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -6$.	1