EF2 : MATHÉMATIQUES II

Durée : 1 heure **Coefficient : 1**

ÉPREUVE FACULTATIVE

Le (la) candidat (e) doit traiter tous les exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices est autorisé.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

EXERCICE N° 1 (9 points)

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$. $\left(u_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x\right)$.

1) Montrer que $u_0 = \mathrm{e} - 1$ et que $u_1 = 1$.

2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

   on a la relation de récurrence : $u_n = \mathrm{e} - n\,u_{n-1}$.

3) En utilisant la relation précédente, calculer les valeurs exactes de u_2, u_3 et u_4.

EXERCICE N° 2 (11 points)

La société ECOLUX vend des panneaux solaires de 2 types (A ou B).

On suppose que la variable aléatoire X_A qui, à tout panneau solaire de type A, choisi au hasard, associe la durée de vie exprimée en mois, suit la loi exponentielle de paramètre 0,0125.

On suppose que la variable aléatoire X_B qui, à tout panneau solaire de type B, choisi au hasard, associe la durée de vie exprimée en mois, suit la loi exponentielle de paramètre 0,01.

On suppose X_A et X_B indépendantes.

Vous avez acheté un panneau A et un panneau B.

1) Calculer la durée de vie moyenne d'un panneau de type *A*, et celle d'un panneau de type *B*.

2) Quelle est la probabilité pour qu'au bout de 8 ans (c'est-à-dire 96 mois) les deux panneaux fonctionnent encore ?

   (On donnera la valeur décimale arrondie, à 10^{-3} près, du résultat).

3) *ECOLUX déclare dans sa publicité que le rendement (en %) de ses panneaux de type A est de 60 %.*

   Rappel : Si la variable aléatoire qui, à tout panneau de type A choisi au hasard, associe le rendement (en %) a pour espérance mathématique m et pour écart type σ, alors on considère que la variable aléatoire Z qui, à tout échantillon aléatoire non exhaustif de n panneaux (avec $n > 30$), associe le rendement <u>moyen,</u> suit la loi normale d'espérance m et d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

   Une statistique effectuée sur un échantillon aléatoire non exhaustif de 37 panneaux de type A a donné un rendement moyen (en %) de 57 avec un écart type de 12.
   (La valeur de la variable Z pour cet échantillon est donc de 57).

   a) Donner une estimation ponctuelle de σ à 10^{-2} près. On utilisera cette approximation dans la question suivante.
   b) Construire et effectuer un test d'hypothèse au niveau de signification de 5 %, en prenant pour :

      - hypothèse H_0 : $m = 60$;
      - hypothèse H_1 : $m \neq 60$.

   Conclure.

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE FACULTATIVE - SUJET NATIONAL - SESSION 2001

	Question	Correction	Barème proposé
Exercice I	1)	$u_0 = \left[e^x\right]_0^1 = e-1$ et $u_1 = \left[x\times e^x - e^x\right]_0^1 = 1$ (après une intégration par parties pour le deuxième calcul).	2
	2)	Posons, pour le calcul de u_n : $\begin{cases} u(x) = x^n \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = n\times x^{n-1} \\ v(x) = e^x \end{cases}$, on obtient : $u_n = \left[x^n e^x\right]_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1}\times e^x \,dx = e - n\times u_{n-1}.$	1 3
	3)	$n=2$: l'égalité (1) devient $u_2 = e-2u_1 = e-2(1) = e-2.$ $n=3$: l'égalité (1) devient $u_3 = e-3(e-2) = 6-2e.$ $n=4$: l'égalité (1) devient $u_4 = e-4(6-2e) = 9e-24.$	3
Exercice II	1)	La durée de vie moyenne d' un panneau de type A est $E(X_A) = \frac{1}{\lambda_A} = \frac{1}{0{,}0125} = 80$ mois. Pour un panneau de type B, on trouve $\frac{1}{E(X_B)} = \frac{1}{0{,}01} = 100$ mois.	1 1
	2)	Les deux variables étant indépendantes : la probabilité pour qu'au bout de 96 mois, les deux panneaux fonctionnent encore est : $P((X_A > 96) \text{ et } (X_B > 96)) = P(X_A > 96)\times P(X_B > 96)$ $= e^{-0{,}0125\times 96}\times e^{-0{,}01\times 96} = 0{,}115$ à 10^{-3} près.	3
	3)a)	L'écart type de l'échantillon étant égal à 12, on estime celui de la variable « rendement moyen » $\overline{R}$ à $\frac{\sigma}{\sqrt{37}}$, avec σ estimé à : $12\times\sqrt{\frac{37}{36}} = 12{,}17.$ On trouve : $\frac{\sigma}{\sqrt{37}} = 2$ à 10^{-2} près. Avec l'hypothèse H_0, on peut estimer que $\overline{R}$ suit la loi $\mathcal{N}(60\,;2)$.	0,5 1 0,5
	3)b)	Avec l'hypothèse H_0, on peut estimer que $\overline{R}$ suit la loi $\mathcal{N}(60\,;2)$. On cherche l'intervalle [a ; b] tel que : $P\left(a \le \overline{R} \le b\right) = 0{,}95 \Leftrightarrow P\left(\frac{a-60}{2} \le T \le \frac{b-60}{2}\right) = 0{,}95.$ On a donc (puisque $2\Pi(t) - 1 = 0{,}95 \Leftrightarrow t = 1{,}96$) : $\frac{b-60}{2} = \frac{60-a}{2} = 1{,}96.$ On trouve : $a = 56{,}08$ et $b = 63{,}92.$ ▪ Enonçons la règle de décision : on accepte l'hypothèse H_0 si et seulement si la moyenne de l'échantillon est comprise dans l'intervalle [56,08 ; 63,92]. On rejette l'hypothèse H_0. ▪ Test d'hypothèse : le rendement moyen de l'échantillon prélevé appartient à l'intervalle $(56{,}08 < 57 < 63{,}92)$, on admet l'hypothèse H_0. La société ECOLUX est fondée pour affirmer que le rendement de ses panneaux de type *A* est en pourcentage de 60 %.	1 2 1