BTS INFORMATIQUE DE GESTION SESSION 2002

E2 : MATHÉMATIQUES I

Durée : 3 heures **Coefficient : 2**

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

Le (la) candidat (e) doit traiter tous les exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices est autorisé.

Le formulaire officiel de mathématique est joint au sujet.

EXERCICE N° 1

(4 points)

Une usine fabrique 3 sortes d'articles : a_1, a_2, a_3, à partir de 3 modules : m_1, m_2, m_3.
On donne :

articles →	a_1	a_2	a_3	
modules m_1	3	9	5	m_1
modules m_2	4	0	9	m_2
modules m_3	4	8	6	m_3

modules	m_1	m_2	m_3
Poids unitaires (kg)	5	6	3
Coûts unitaires (en euros)	180	250	150

On lit par exemple :

Pour fabriquer un article a_2, il faut 9 modules m_1 et 8 modules m_3.
Un module m_1 pèse 5 kg et coûte 180 euros.

On note :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 9 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 180 & 250 & 150 \end{bmatrix}$$

1) a) Calculer le produit matriciel $M \times A$.
b) Interpréter les lignes de ce produit.

2) Une semaine donnée, l'usine doit fournir 8 articles a_1, 12 articles a_2, 13 articles a_3.
Elle dispose en début de semaine d'un stock de 200 modules de chaque sorte.

On note F la matrice : $F = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit matriciel $A \times F$? Que représente-t-il ?
b) La demande [8 articles a_1, 12 articles a_2, 13 articles a_3] peut-elle être satisfaite ?

EXERCICE N° 2

(8 points)

Toutes les probabilités demandées dans cette exercice seront données sous leur forme décimale arrondie à 10^{-3} près.

La partie C peut être traitée indépendamment des deux autres.

Une entreprise vend 2 types de meubles : M_1, M_2 respectivement 419 euros et 509 euros l'unité.

La demande mensuelle en meubles M_1 est :
une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}$ (85 ; 15).
La demande mensuelle en meubles M_2 est :
une variable aléatoire Y qui suit la loi normale $\mathcal{N}$ (52 ; 8).

On suppose que X et Y sont indépendantes.

Partie A

Dans cette question, on suppose que le stock est suffisant pour satisfaire la demande.
Ainsi, l'entreprise vend mensuellement X meubles M_1 et Y meubles M_2.

Calculer les probabilités (un mois donné) d'avoir les évènements suivants :

V_1 : on vendra au plus 80 meubles M_1.

V_2 : on vendra au plus 70 meubles M_2.

Partie B

Dans cette question, le stock n'est pas obligatoirement suffisant pour satisfaire la demande. L'entreprise dispose en début de mois d'un stock de 80 meubles M_1 et 70 meubles M_2.

Quelles sont les probabilités des évènements suivants :

S1 : il y aura rupture de stock en meubles M_1.
S2 : il y aura rupture de stock en meubles M_2.
S : il y aura rupture de stock (en meubles M_1 ou M_2).

(La rupture de stock concerne la fin du mois, et signifie que la demande est supérieure au stock).

Partie C

Un mois donné est dit rentable si le chiffre d'affaires de ce mois dépasse 70 000 euros.

1) Exprimer (en euros) le chiffre d'affaires Z du mois en fonction de X et Y.

2) Calculer l'espérance mathématique de Z.

3) *On admet que Z suit la loi normale* $\mathcal{N}$ (62083 ; 7400).
Quelle est la probabilité qu'un mois donné soit rentable ?

4) On note R le nombre de mois rentables d'un semestre, et on suppose l'indépendance entre les évènements « rentable ou non rentable » des mois successifs.
Justifier le résultat suivant : R suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ (6 ; 0,142).

5) Quelle est la probabilité que sur les 6 mois d'un semestre, on en ait au moins deux rentables ?

EXERCICE N° 3

(**8 points)**

Un calcul doit être effectué un grand nombre de fois avec des données différentes. Il peut être réalisé à l'aide d'une configuration comprenant plusieurs processeurs travaillant simultanément, et d'un logiciel adéquat pilotant ces processeurs.
Matériellement, on peut installer jusqu'à 256 processeurs.
Le temps d'exécution T d'un calcul (en secondes) est donné en fonction du nombre entier p de processeurs installés par :

$$T(p) = \frac{1}{200} + \frac{1+\ln(p)}{p^2}$$, ln désignant le logarithme népérien.

Le coût (matériel + logiciel) de la configuration est proportionnel au nombre de processeurs installés. On désire choisir p pour que le temps de calcul et le coût soient faibles, et pour cela, on définit l'indice I égal au produit du nombre de processeurs par le temps de calcul :

$$I(p) = p \times T(p) = p\left(\frac{1}{200} + \frac{1+\ln(p)}{p^2}\right).$$

On cherchera donc à avoir une configuration pour laquelle I est minimal.

Partie A

<u>Étude du temps de calcul</u>.

Soit t la fonction de la variable x, définie sur l'intervalle [1 ; +∞ [par :

$$t(x) = \frac{1}{200} + \frac{1+\ln(x)}{x^2}.$$

1) Calculer la dérivée $t'(x)$. En déduire le sens de variation de la fonction t.

2) Calculer la limite de t en + ∞. Interpréter ce résultat.

3) Calculer, à 10^{-6} près, $t\,(72)$, $t\,(73)$. Combien faut-il installer de processeurs pour que le temps de calcul soit inférieur à 0,006 secondes ?

Partie B

<u>Étude de l'indice</u>.

Soit f la fonction de la variable x, définie sur l'intervalle [1 ; 256] par :

$$f\left(x\right)=x\left(\frac{1}{200}+\frac{1+\ln(x)}{x^2}\right).$$

On définit l'indice moyen de f par $m=\dfrac{1}{255}\displaystyle\int_1^{256} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

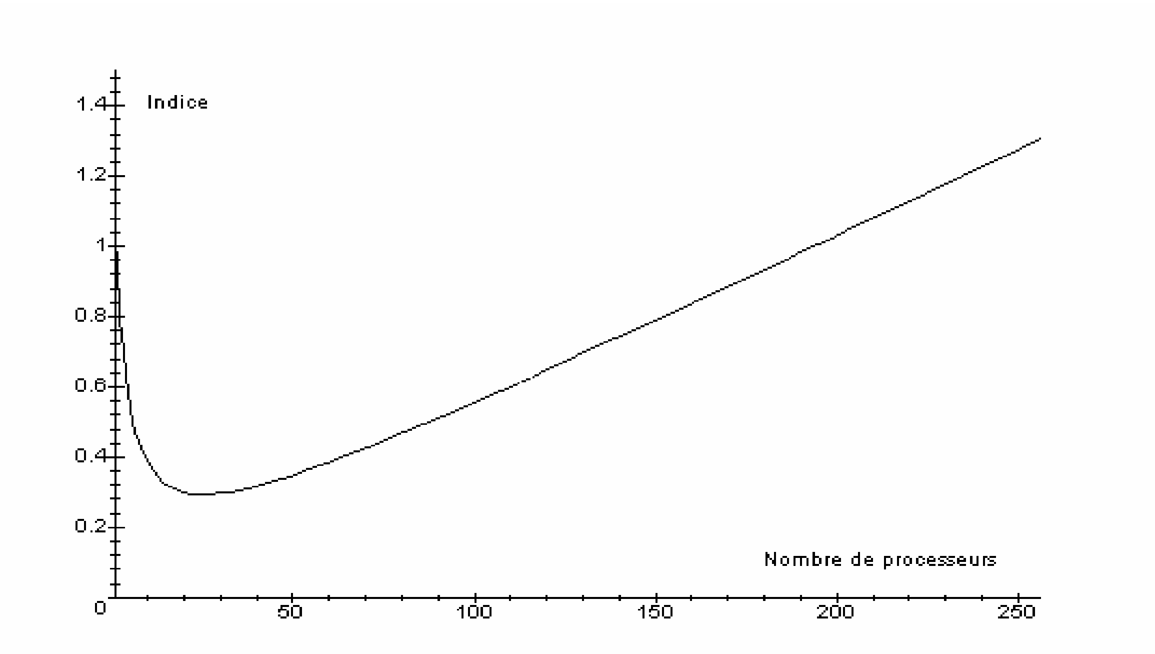
1) Vérifier que la fonction G définie sur l'intervalle [1 ; 256] par

$$G\left(x\right)=\frac{(1+\ln(x))^2}{2}$$

est une primitive de la fonction g, définie sur le même intervalle, par : $g(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x}$.

2) En déduire une primitive F de f puis l'indice moyen m à 10^{-2} près.

3) En vous aidant du graphique ci-dessous (courbe représentative de f), puis d'une calculatrice, et en remarquant que $I\left(p\right)=f\left(p\right)$, déterminer précisément le nombre p de processeurs à installer pour que l'indice soit minimal.



CORRIGE DU SUJET : B BTS INFORMATIQUE DE GESTION SESSION 2002
EPREUVE DE MATHEMATIQUES E2

	Question	Correction	Barème proposé
Exercice I			
	1)a)	On a : $M \times A = \begin{pmatrix} 51 & 69 & 97 \\ 2140 & 2820 & 4050 \end{pmatrix}$.	1
	1)b)	Sur la première ligne : on lit le poids (en kg) de chaque article. Par exemple 69 est le poids en kg de l'article a_2. Sur la deuxième ligne, on lit les coûts unitaires (en euros). Par exemple, 4050 est le coût unitaire de l'article a_3.	1
	2)a)	On a : $A \times F = \begin{pmatrix} 197 \\ 149 \\ 206 \end{pmatrix}$. Chaque élément de cette matrice-unicolonne représente le nombre de modules correspondants nécessaires à la fabrication hebdomadaires de 8 articles a_1, de 12 articles a_2 et de 13 articles a_3. Par exemple, 197 est le nombre de modules de type m_1 à fournir pour cette fabrication hebdomadaire.	1
	2)b)	Le nombre maximum de modules d'un type donné pouvant être utilisé étant 200, l'usine ne peut répondre à la demande puisque celle-ci nécessite 206 modules de type m_3.	1
Exercice II			
	A	La probabilité de l'événement V_1 est égale à : $P(X \leq 80) = P\left(\frac{X-85}{15} \leq \frac{80-85}{15}\right) = \Pi\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - \Pi\left(\frac{1}{3}\right) = 0{,}371$ avec la précision demandée. On trouve de même : $P(V_2) = P(Y \leq 70) = P\left(\frac{Y-52}{8} \leq \frac{70-52}{8}\right) = \Pi(2{,}25) = 0{,}988.$	1 0,5
	B	$P(S1) = P(X > 80) = 1 - P(X \leq 80) = 1 - P(V_1) = 0{,}629.$ $P(S2) = P(Y > 70) = 1 - P(Y \leq 70) = 1 - P(V_2) = 0{,}012.$ $P(S) = P(S_1 \cup S_2) = P(X > 80 \text{ ou } Y > 70) = P\left(\overline{(X \leq 80) \cap (Y \leq 70)}\right)$ $P(S) = 1 - P((X \leq 80) \cap (Y \leq 70)).$ Comme les variables X et Y sont indépendantes : $P((X \leq 80) \cap (Y \leq 70)) = P(X \leq 80) \times P(Y \leq 70)$ et on a finalement : $P(S) = 0{,}633.$	0,5 0,5 1
	C)1)	Z = 419 X + 509 Y.	0,5
	C)2)	On sait que : E(Z) = 419 E(X) + 509 E(Y) = $419 \times 85 + 509 \times 52 = 62083$.	0,5
	C)3)	La probabilité demandée est égale à P(Z > 70000). $P(Z > 70000) = 1 - P\left(\frac{Z-62083}{7400} \leq \frac{70000-62083}{7400}\right) = 1 - \Pi\left(\frac{7917}{7400}\right) = 0{,}142.$	1
	C)4)	Il y a répétition du même processus six fois, de manière indépendante avec seulement deux issues possibles : • le mois est rentable avec une probabilité p égale à 0,142 • le mois n'est pas rentable avec une probabilité égale à $1 - p = 0{,}858$. R est une variable binomiale et suit la loi binomiale b (6 , 0,140).	1
	C)5)	On calcule : P(R ≥ 2). $P(R \geq 2) = 1 - P(R=0) - P(R=1) = 1 - C_6^0 \times 0{,}142^0 \times 0{,}858^6 - C_6^1 \times 0{,}142^1 \times 0{,}858^5$ D'où : P(R ≥ 2) = 0,205.	1,5

Exercice III			
	A)1)	$t'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x^2-(1+\ln x)\times 2x}{x^4}=\dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$. $t'(x)\geq 0 \Leftrightarrow -1-2\ln x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$. Or $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}<1$ donc sur $[1,+\infty[$, $t'(x)<0$. La fonction t est strictement décroissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$.	1,5 0,5
	A)2)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=0$, la fonction logarithme népérien étant dominée par la fonction puissance en l'infini. On a donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} t(x)=\dfrac{1}{200}$. Le temps de calcul ne peut pas descendre en dessous de $\dfrac{1}{200}$ seconde, quel que soit le nombre de processeurs installés.	0,5 0,5
	A)3)	$t(72)=0{,}006018$ $t(73)=0{,}005993$ Comme t est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$, on a : $x\leq 72 : t(x)>0{,}006$ $x\geq 73 : t(x)<0{,}006$. Il faut installer 73 processeurs pour obtenir un temps de calcul inférieur à 6 millièmes de seconde.	0,5 0,5
	B)1)	$G'(x)=\dfrac{1}{2}\times 2\times(1+\ln x)\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{(1+\ln x)}{x}$.	1
	B)2)	Une primitive F de f est donnée par : $F(x)=\dfrac{1}{400}x^2+G(x)=\dfrac{x^2}{400}+\dfrac{(1+\ln x)^2}{2}$. L'indice moyen vaut donc : $m=\dfrac{1}{255}\left[\dfrac{x^2}{400}+\dfrac{(1+\ln x)^2}{2}\right]_1^{256}=0{,}72$ à 10^{-2} près.	0,5 1
	B)3)	L'indice est minimal lorsque la fonction f est minimale. D'après la courbe représentative, ce minimum est obtenu pour x compris entre 20 et 30. Il suffit de calculer $f(p)$ pour $20\leq p\leq 30$. On trouve en particulier : $f(24)\approx 0{,}294086$ $f(25)\approx 0{,}293755$ $f(26)\approx 0{,}293773$ La fonction f est encore décroissante sur [24 , 25] et comme $f(25)<f(26)$, le minimum de $f(x)$ pour les valeurs entières, p , de la variable réelle x, est obtenu pour $p=25$. L'indice est minimal pour 25 processeurs.	1,5