

**E2 : MATHÉMATIQUES I**

Durée : 3 heures

Coefficient : 2

**ÉPREUVE OBLIGATOIRE**

**Le (la) candidat (e) doit traiter tous les exercices.**

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices est autorisé.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

**EXERCICE N° 1****(8 points)****Partie A**

Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$ .

1. - Calculer  $g(1)$ .
2. - Montrer que  $g$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .
3. - Dédire des questions précédentes que  $g$  est strictement positive sur l'intervalle  $]1, +\infty[$  et strictement négative sur l'intervalle  $]0, 1[$ .

## Partie B

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$ .

On note (c) la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. - On admet que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ . Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

(On pourra utiliser le résultat  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ).

2. - a) Vérifier que, pour tout  $x$  appartenant à  $]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .

b) Etudier le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variation.

3. - a) Montrer que la droite (D) d'équation  $y = x - 1$  est asymptote à la courbe (c).

b) Etudier la position de (c) par rapport à (D).

4. - a) Recopier et compléter le tableau suivant, en donnant les résultats arrondis à  $10^{-1}$  près.

$x$	0,25	0,5	1	2	$e$	4	6	8
$f(x)$								

b) Tracer la droite (D) et la courbe (c).

(On prendra 2 cm pour unité graphique).

## Partie C

1. - Montrer que la fonction  $h$ , définie sur  $]0, +\infty[$  par  $h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$  est une primitive de la fonction  $k$ , définie sur  $]0, +\infty[$  par  $k(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

2. - Soit ( $\Delta$ ) la partie du plan limitée sur le graphique par la courbe (c), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .

a) Calculer l'aire de ( $\Delta$ ), exprimée en unités d'aire.

b) Calculer la valeur décimale arrondie à  $10^{-2}$  près de l'aire de ( $\Delta$ ), exprimée en  $\text{cm}^2$ .

**EXERCICE N° 2****(8 points)***Les parties A, B, C sont indépendantes.***Partie A**

Une enquête est faite auprès des 2 500 élèves d'un lycée sans internat, afin de savoir s'ils disposent d'un ordinateur chez eux.

Dans ce lycée, 55 % des élèves sont demi-pensionnaires.

L'enquête révèle, d'une part que 40 % des élèves de ce lycée disposent d'au moins un ordinateur chez eux, et, d'autre part que parmi ces lycéens disposant d'au moins un ordinateur chez eux, 540 ne sont pas demi-pensionnaires.

1. - Recopier et compléter le tableau des effectifs suivant :

	demi-pensionnaires	non demi-pensionnaires	Total
lycéens disposant d'au moins un ordinateur chez eux			
lycéens ne disposant pas d'ordinateur chez eux			
Total			2 500

2. - On choisit au hasard un élève du lycée. Tous les élèves ont la même probabilité d'être choisis.

On considère les événements suivants :

$D$  "l'élève est demi-pensionnaire".

$O$  "l'élève dispose d'au moins un ordinateur chez lui".

a) Déterminer les probabilités  $P(D)$ ,  $P(O)$  et  $P(D \cap O)$ .

Les événements  $D$  et  $O$  sont-ils indépendants ?

b) Déterminer  $P(D \cup O)$ .

c) Déterminer la probabilité de  $D$  sachant  $O$ .

**Dans les parties B et C, on utilisera les critères d'approximation d'une loi binomiale suivants :**

lorsque  $n \geq 50, p \leq 0,1$  et  $np \leq 10$ , la loi binomiale  $b(n, p)$  peut être approchée par une loi de Poisson ;

lorsque  $np \geq 15$  et  $n(1-p) \geq 15$ , la loi binomiale  $b(n, p)$  peut être approchée par une loi normale.

## Partie B

L'enquête a montré que 40 % des élèves du lycée disposent d'au moins un ordinateur chez eux. On interroge successivement 100 élèves du lycée, choisis au hasard. On admet que l'effectif est suffisamment important pour que les interrogations soient considérées comme indépendantes.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui indique combien, parmi ces 100 élèves, disposent d'au moins un ordinateur chez eux.

1. - Expliquer pourquoi  $X$  suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2. - a) Vérifier que la loi de  $X$  peut être approchée par une loi normale, dont les paramètres sont

$$m = 40 \text{ et } \sigma = 2\sqrt{6}.$$

- b) On note  $Z$  une variable aléatoire suivant la loi normale  $n(40, 2\sqrt{6})$ .  
On admet que  $P(Z \leq 50,5)$  est une bonne approximation de  $P(X \leq 50)$ .

Calculer  $P(Z \leq 50,5)$  et  $P(Z > 50,5)$ . Interpréter ce dernier calcul. On donnera les résultats de ces calculs arrondis à  $10^{-4}$ .

## Partie C

L'enquête a montré en outre que 5 % des élèves du lycée disposent de deux ordinateurs chez eux. On interroge successivement 100 élèves du lycée, choisis au hasard. On admet que l'effectif du lycée est suffisamment important pour que les interrogations soient considérées comme indépendantes.

Soit  $Y$  la variable aléatoire qui indique combien, parmi ces 100 élèves, disposent de deux ordinateurs chez eux.

1. - Cette variable aléatoire  $Y$  suit la loi binomiale  $b(100 ; 0,05)$ . Calculer la valeur exacte de la probabilité  $P(Y = 5)$  et donner la valeur décimale arrondie, à  $10^{-2}$  près, de cette probabilité.
2. - a) Vérifier que la loi de  $Y$  peut être approchée par une loi de Poisson, dont on précisera le paramètre.  
b) En utilisant cette loi de Poisson, calculer une valeur approchée, à  $10^{-2}$  près, de la probabilité  $P(Y \leq 5)$ .

**EXERCICE N° 3****(4 points)**

On considère le graphe défini par le tableau suivant :

sommets	successeurs
<i>A</i>	<i>A, B, D</i>
<i>B</i>	<i>A, C</i>
<i>C</i>	<i>A</i>
<i>D</i>	<i>C</i>

1. - Déterminer la matrice adjacente  $M$  de ce graphe.
2. -
  - a) Calculer la matrice  $M^2 = M \times M$ , où  $\times$  représente la multiplication des matrices.
  - b) Utiliser le résultat précédent pour calculer le nombre total de chemins de longueur 2 du graphe, puis le nombre de chemins de longueur 2 partant de  $A$ .
  - c) Citer tous les chemins de longueur 2 partant de  $A$ .
3. - Citer tous les chemins de longueur 3 partant de  $D$ .