

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2004

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : ES

Durée de l'épreuve : 3 heures – Coefficient : 7

Ce sujet comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5

L'usage d'une calculatrice est autorisé

Des éléments de formulaire sont joints au sujet.

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

### Exercice 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

A la rentrée scolaire, on fait une enquête dans une classe de sixième comprenant 25 élèves.

Partie A : On sait que, dans cette classe, 48 % des élèves ont 11 ans,  $\frac{1}{5}$  ont 13 ans et les autres ont 12 ans. Ces élèves utilisent deux types de sacs de cours : le sac à dos ou le cartable classique . 15 élèves, dont les  $\frac{2}{3}$  ont 11 ans, ont acheté un cartable classique ; les autres, dont la moitié ont 12 ans , ont acheté un sac à dos.

1°) Recopier le tableau suivant sur votre copie et le compléter à l'aide des données de l'énoncé:

	Sac à dos	Cartable	Total
11 ans			
12 ans			
13 ans			
Total			25

2°) On interroge au hasard un élève de cette classe.

On note : S l'événement : « l'élève a un sac à dos ».

C l'événement : « l'élève a un cartable ».

T l'événement : « l'élève a treize ans » .

a - Montrer que  $P(S) = 0,4$ .

b - Calculer  $P(C \cap T)$ .

3°) On interroge successivement et de manière indépendante trois élèves de cette classe ; quelle est la probabilité qu'exactement deux d'entre eux aient un sac à dos ?

Partie B : A leur inscription, ces élèves doivent souscrire une assurance scolaire ; deux types de contrats annuels sont proposés. D'après des études statistiques, le contrat A dont le coût est de 20 € est choisi avec une probabilité de 0,7 et le contrat B dont le coût est de 30 € est choisi avec une probabilité de 0,3 . De plus, le collège propose une adhésion facultative au foyer coopératif, d'un montant de 15 €. Indépendamment du contrat d'assurance choisi, 40 % des élèves prennent une carte d'adhérent du foyer.

On note : A l'événement : « l'élève a choisi le contrat A »

B l'événement : « l'élève a choisi le contrat B »

F l'événement : « l'élève est adhérent du foyer » .

1°) Construire l'arbre des probabilités associé à la situation décrite ci-dessus.

2°) Quelle est la probabilité qu'un élève ait pris le contrat B et soit adhérent du foyer ?

3°) A chaque élève pris au hasard, on associe le coût X de son inscription (assurance scolaire plus adhésion éventuelle au foyer) ;

a - Quelles sont les valeurs possibles de ce coût ?

b - Etablir la loi de probabilité de ce coût et présenter le résultat dans un tableau.

c - Calculer l'espérance mathématique de cette loi. Quelle interprétation peut-on en donner ?

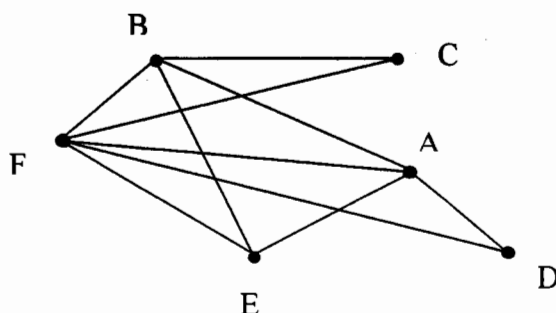
## Exercice 2 (5 points)

### Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

#### Partie A

On considère le graphe  $G_1$  ci-dessous :



1°) Justifier les affirmations suivantes :

A<sub>1</sub>- Le graphe  $G_1$  admet au moins une chaîne eulérienne .

A<sub>2</sub>- La chaîne DABCFBEFAE n'est pas une chaîne eulérienne de  $G_1$ .

2°) Déterminer un sous-graphe complet de  $G_1$  ayant le plus grand ordre possible. En déduire un minorant du nombre chromatique  $\gamma$  de ce graphe.

3°) Déterminer un majorant de ce nombre chromatique, (on justifiera la réponse).

4°) En proposant une coloration du graphe  $G_1$ , déterminer son nombre chromatique.

#### Partie B

Soit la matrice  $M$  d'un graphe orienté  $G_2$  dont les sommets A, B, C, D et E sont pris dans l'ordre alphabétique.

$$\text{On donne } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1°) Construire le graphe  $G_2$ .

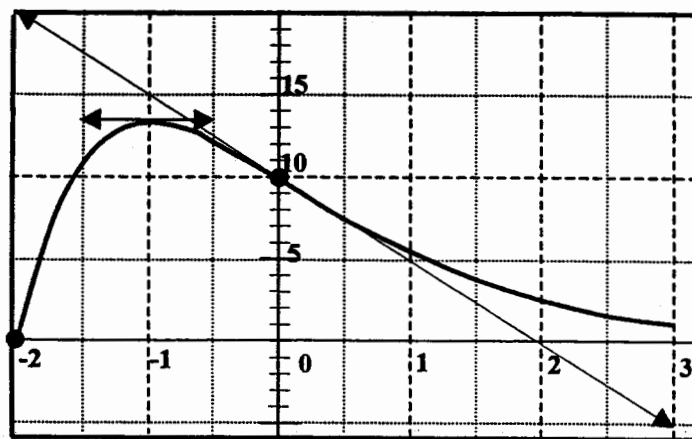
2°) Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant B à D. Les citer toutes.

### Exercice 3 (4 points)

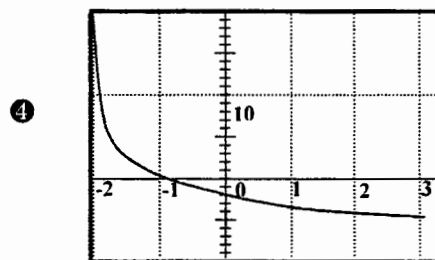
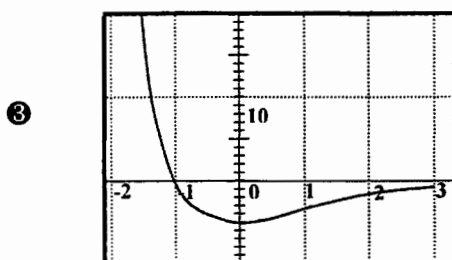
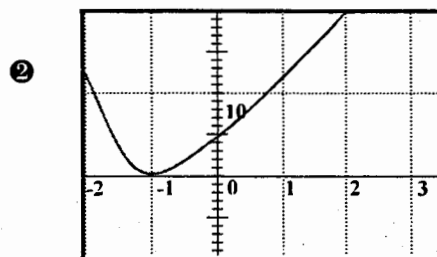
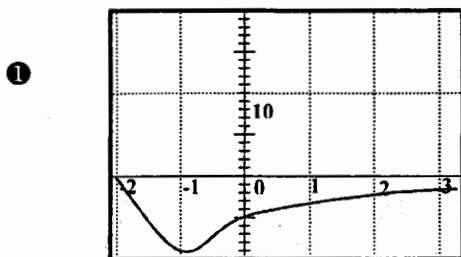
**Commun à tous les candidats**

La représentation graphique (C) ci-dessous est celle d'une fonction  $f$  définie sur  $[-2 ; 3]$  dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ . On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

La courbe (C) vérifie les propriétés suivantes : Les points ainsi marqués • sont à coordonnées entières et appartiennent à la courbe tracée, la tangente au point d'abscisse  $-1$  est parallèle à l'axe des abscisses, la tangente au point d'abscisse  $0$  coupe l'axe des abscisses en  $x = 2$ .



- 1°) Donner une équation de la tangente au point d'abscisse  $0$ .
- 2°) Donner les variations de  $f$ .
- 3°) Une des quatre courbes ci-dessous représente graphiquement la fonction  $f'$ .  
Déterminer celle qui la représente, en justifiant l'élimination de chacune des 3 autres courbes.



- 4°) On admet que la fonction  $f$  est définie par une expression de la forme  $f(x) = (ax + b)e^{kx}$  où  $a$ ,  $b$  et  $k$  sont des nombres réels.
  - a - Déterminer  $f'$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $k$ .
  - b - En utilisant la question précédente et les propriétés de la courbe (C) données au début de l'exercice, calculer  $a$ ,  $b$  et  $k$ .

**Exercice 4 (5 points)**

**Commun à tous les candidats**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $I = ]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2(1 + \ln x)}{x}$ .

1°) a - Résoudre dans  $I$  l'équation  $f(x) = 0$ ; (Calculer la valeur exacte de la solution, puis en donner une valeur arrondie à  $10^{-3}$ ).

b - Résoudre dans  $I$  l'inéquation  $f(x) > 0$ .

2°) On donne ci-dessous le tableau de variation de  $f$  sur l'intervalle  $I$ .

Justifier tous les éléments contenus dans ce tableau (variations, limites, valeurs numériques).

$x$	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$			$2$		
		$-\infty$		$0$	

3°) Dans une entreprise, on a modélisé par la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0,2; +\infty[$  le « bénéfice » mensuel (éventuellement négatif) réalisé en vendant  $x$  milliers d'objets fabriqués. Ce bénéfice est exprimé en milliers d'euros.

En utilisant les résultats des questions précédentes, répondre aux questions suivantes :

a - Quel nombre minimal d'objets l'entreprise doit-elle vendre mensuellement pour que le bénéfice soit positif ?

b - Combien faut-il vendre d'objets pour réaliser le bénéfice maximal ? Quel est le montant de ce bénéfice maximal ?

# MATHÉMATIQUES –SÉRIE ES

## Eléments de formulaire

### Probabilités

#### **Probabilité conditionnelle de B sachant A**

$P_A(B)$  est définie par  $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$

Cas où A et B sont indépendants :  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

#### **Formule des probabilités totales**

Si les événements  $B_1, B_2, \dots, B_n$  forment une partition de  $\Omega$   
alors  $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$ .

#### **Espérance mathématique.**

Une loi de probabilités étant donnée, son espérance mathématique est  $E = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ .

### Analyse

#### **Limites**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

#### **Dérivées et primitives**

Les hypothèses permettant d'utiliser les formules doivent être vérifiées par le candidat.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$