PS11 **PRINTEMPS 2000**

EXAMEN FINAL
(2 heures ; calculettes non autorisées)

Le total de la notation est sur 35 points. La note sera ramenée sur 20 en tenant compte de la longueur du sujet.

LES QUESTIONS DE COURS ET LES EXERCICES 1-2-3 SERONT REDIGES SUR UNE FEUILLE, LES EXERCICES 4 ET 5 SUR UNE AUTRE FEUILLE.

Rappel: on rappelle la formule de l'accélération en coordonnées polaires (notation du cours).

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{u_r} + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{u_\theta} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u_\theta}$$

Questions de cours (4 pts):

* Donner (sans démonstration) la formule de composition des accélérations dans le cas de deux repères dont l'un est en rotation autour d'un axe fixe de l'autre avec un vecteur rotation $\vec{\Omega}$ constant.

* Qu'est-ce qu'un repère galiléen? Comment peut-on savoir si un repère est galiléen? Quelle relation existe-t-il entre deux repères galiléens ?

* Enoncer le théorème de la puissance cinétique.

Exercice n° 1 (5 pts) : Cinématique en cartésiennes.

On considère le mouvement dont les équations paramétrées en coordonnées cartésiennes rapportées à une base $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont:

$x(t) = 2t$

$y(t) = 0.05 \cos 6t$ t appartenant à l'intervalle $[O, 2\pi/3]$

1°) Déterminer à tout instant dans la base cartésienne les vecteurs position, vitesse et accélération.

2°) Représenter la trajectoire $y = f(x)$ sur un dessin dont les axes seront gradués précisément.

3°) Représenter à $t = \pi/3$, le vecteur vitesse et le vecteur accélération sur le graphe.

4°) Calculer le produit scalaire de la vitesse par l'accélération et en déduire les intervalles de temps durant lesquels la norme de la vitesse croit et ceux où elle décroît.

5°) Que peut décrire ce mouvement (pensez aux tp d'électricité).

Exercice n°2 (5 pts): Compréhension des coordonnées polaires.

On considère le mouvement dont les équations paramétrées en coordonnées polaires sont (les unités de r sont arbitraires):

$r(t) = 1 - at$

$\theta(t) = 2\pi t$ t appartenant à l'intervalle $[O, 1]$

1°) Que doit valoir a pour qu'au bout d'un tour, $r = 0$. Une démonstration précise est attendue.

2°) On prend $a = 1$. Tracer l'allure générale de la trajectoire.

3°) Déterminer dans la base polaire le vecteur position, le vecteur vitesse et le vecteur accélération.

4°) Calculer le produit scalaire de la vitesse et de l'accélération à tout instant et conclure.

5°) Représenter le vecteur vitesse et le vecteur accélération à l'instant t = 1/4.

Exercice n°3 (5 pts): Composition des vitesses.

Attention: aucune réponse ne sera acceptée sans justification mathématique claire.

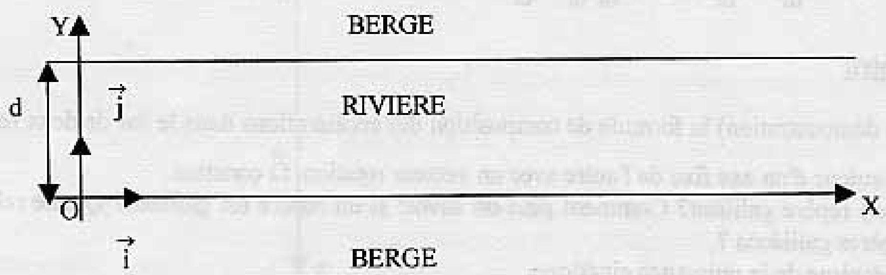
Un nageur veut traverser une rivière de largeur d. La vitesse du courant de la rivière est $\vec{V_0} = V_0 \vec{i}$ (V_0 constante). La "force" de sa nage lui permet une vitesse par rapport à l'eau $\vec{U}$ dont la norme sera notée U. Cette vitesse de nage du nageur par rapport à l'eau se décompose vectoriellement $\vec{U} = V\vec{i} + W\vec{j}$ ($W > 0$): voir figure. Bien entendu le nageur peut orienter le vecteur $\vec{U}$ comme il veut, seule la norme U est fixée!!!

1°) Déterminer la vitesse du nageur par rapport à la berge.

2°) En utilisant le résultat précédent, déterminer V pour que le nageur, partant de O, puisse traverser perpendiculairement à la rive. Donner une interprétation physique simple du résultat trouvé. Cela est-il toujours possible?

3°) Quel est alors le temps de traversée en fonction de d, U et V_0?

4°) Le nageur désire traverser le plus vite possible sans se soucier de l'endroit où il accoste. Déterminer alors V. Quel est alors le temps de traversée? Quelle aura été la trajectoire? De combien aura-t-il dérivé?

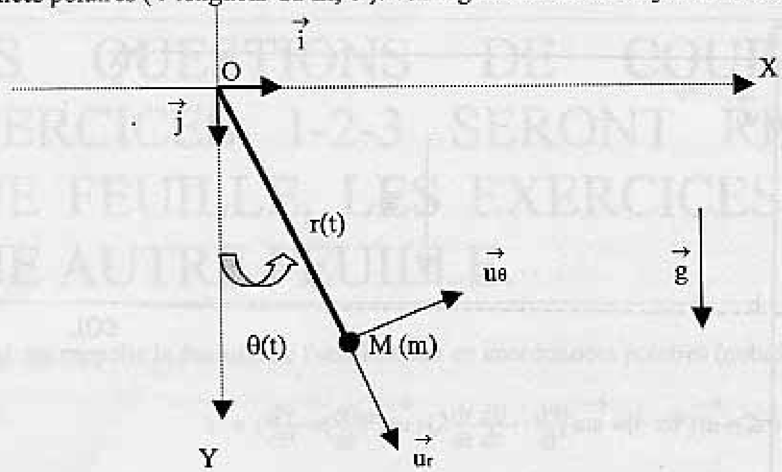


CHANGER DE FEUILLE

PRENDRE UNE NOUVELLE FEUILLE

Exercice n°4 (8 pts): Pendule du professeur Tournesol avec fil élastique.

On considère un fil de longueur à vide l_o, au bout duquel on attache une particule ponctuelle M de masse m. Le fil élastique se comporte comme un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_o. Le fil oscille sous l'effet de la pesanteur et de son élasticité dans un plan. Le mouvement de la masse est décrit par les coordonnées polaires (r longueur du fil, θ): voir figure. Le fil est toujours tendu donc en extension.



1°) Faire un bilan des forces agissant sur la masse m, lorsque le fil est écarté d'un angle θ par rapport à la verticale et que sa longueur est r. Donner les composantes de chacune des forces dans la base polaire.

2°) En déduire les deux équations différentielles du mouvement qui permettraient (si on savait les intégrer!!!) de trouver l'évolution de r et de θ.

3°) On suppose maintenant que θ est nul quel que soit t (pendule vertical).

a) Trouver l'équation différentielle permettant de trouver l'évolution de r.

b) A t = 0, le pendule est immobile et $r = l_o$ longueur à vide du fil. Montrer qu'une solution possible de cette équation est $r(t) = l_o + \frac{mg}{k}(1 - \cos wt)$ à condition de donner à w une valeur que l'on déterminera.

c) Décrire le mouvement en donnant en particulier la période.

4°) Le pendule n'est plus élastique (sa longueur est constante et vaut l_o) mais θ varie.

a) Trouver l'équation différentielle permettant de trouver l'évolution de θ.

b) Déterminer le mouvement de la masse M en supposant qu'à t = 0, $\theta = \theta_o$ (petit), sa vitesse étant nulle.

c) Décrire le mouvement en donnant en particulier la période.

Exercice n°5 (8 pts):

On lâche un objet sans vitesse initiale du haut d'une tour de hauteur h. On raisonnera sur un axe vertical descendant Oz, avec origine au sommet de la tour (voir figure). L'objet est soumis à son poids et à une force de frottement fluide proportionnelle à sa vitesse: $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ ($\alpha > 0$). Il n'y a pas de vent, on supposera donc que le mouvement est vertical. Le champ de pesanteur est supposé uniforme $\vec{g} = g\,\vec{u_z}$ avec g constante positive.

1°) En appliquant le principe fondamental de la dynamique, trouver l'équation différentielle permettant de trouver la vitesse $v(t) = \frac{dz}{dt}$ en fonction du temps.

2°) Vérifier que $v(t) = A \exp(-Bt) + C$ est solution du problème étudié à condition de donner à A, B et C des valeurs que l'on déterminera en fonction des paramètres du problème et des conditions initiales.

3°) Montrer que cette vitesse tend vers une valeur limite que l'on précisera. Cette valeur pouvait-elle être prédite sans intégrer l'équation différentielle?

4°) Déterminer la loi de chute z(t).

5°) Montrer que si les frottements sont négligeables (α tend vers 0), on retrouve les résultats classiques de la chute libre vus en lycée. On rappelle que $\exp(x) = 1+x+x^2/2$ au voisinage de zéro.

6°) Retrouver le résultat de la question 1 en appliquant le théorème de la puissance cinétique.

7°) Définir l'énergie mécanique de la particule (on ne demande pas de la calculer en fonction du temps!!!). Est-elle constante (expliquer pourquoi)?