PS 11	*EXAMEN FINAL*	Automne 2003
	MECANIQUE DU POINT	

Mardi 20 janvier 2004

Les réponses doivent être justifiées et les calculs explicités.

Calculette autorisée.

Exercice 1 :

Dans un repère cartésien orthonormé *Oxyz*, la position d'un point M est déterminée par les équations paramétriques :

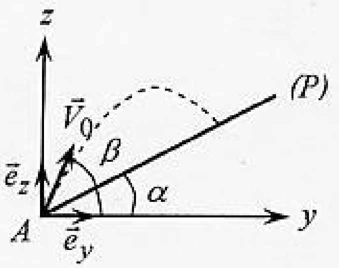
$$x = e^{-t}\cos t \qquad y = e^{-t}\sin t \qquad z = e^{-t}$$

1. Déterminer à l'instant t :
   - 1.1. Les expressions des vecteurs vitesse et accélération.
   - 1.2. Les modules des deux vecteurs précédents.
   - 1.3. Le vecteur unitaire tangent $\vec{T}$, le rayon de courbure R et le vecteur unitaire normal $\vec{N}$.

2. Soit m la projection orthogonale de M sur le plan xOy.
   Déterminer le mouvement de M.
   Pour cela, on utilisera les relations de passage entre les coordonnées cartésiennes et polaires, et on déterminera la relation $r = f(\theta)$ donnant le rayon polaire en fonction de l'angle polaire.

Exercice 2 :

Un projectile M de masse m est lancé à partir d'un point A, avec une vitesse initiale $\vec{V_0}$ (de module V_0) faisant un angle β avec l'horizontale.
La résistance de l'air est négligeable et la pesanteur est supposée constante $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$.
On considère d'autre part un plan matériel *(P)* incliné d'un angle α ($\alpha < \beta$) avec l'horizontale.



1. Déterminer le vecteur position de M à un instant quelconque.
2. Déterminer l'instant où le projectile M rencontre le plan (P).
3. Soit B le point de rencontre. Montrer que la distance $d = AB$ peut s'écrire : $d = \dfrac{2V_0^2 \cos\beta \sin(\beta - \alpha)}{g\cos^2\alpha}$

Rappel : $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$.

Exercice 3 :

Un point matériel M, de masse unité se déplace dans le champ de force défini par :

$$\vec{F} = \left(3t^2 - 4t\right)\vec{e}_x + (12t - 6)\,\vec{e}_y - \left(6t - 12t^2\right)\vec{e}_z$$

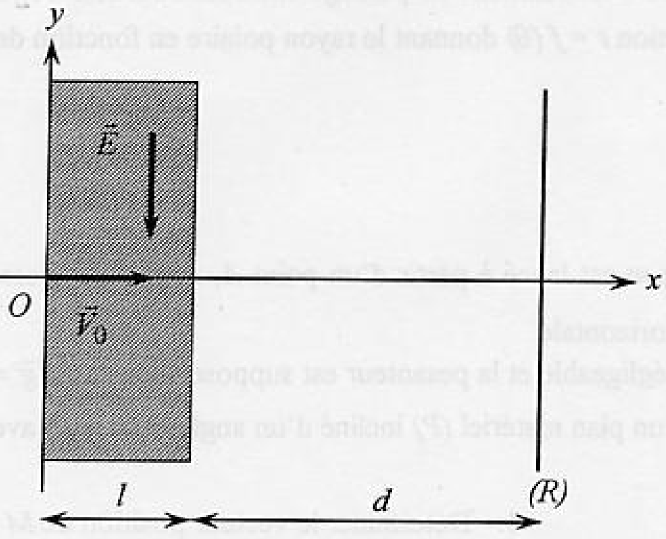
1. Calculer la variation de quantité de mouvement entre les instants $t = 1$ et $t = 2$.
2. Sachant que la vitesse à l'instant $t = 1$ est $\vec{V}_{t=1} = 4\,\vec{e}_x - 5\,\vec{e}_y + 10\,\vec{e}_z$

   Calculer la vitesse à l'instant $t = 2$.
3. En supposant que le point matériel se trouve à l'origine O du repère à $t = 0$, calculer le moment cinétique par rapport à O à l'instant $t = 2$.

Exercice 4:

Un électron M de masse m et de charge $-e$ pénètre, à l'instant initial, avec la vitesse $\vec{V}_0 = V_0\,\vec{e}_x$ dans une région de l'espace (hachurée sur la figure) où règne un champ électrique $\vec{E} = -E\,\vec{e}_y$ constant. Cet électron est donc soumis à la force $\vec{F} = -e\,\vec{E}$.

1. Déterminer l'équation de la trajectoire dans cette zone.
2. Quelle est l'ordonnée de M en sortie de la zone soumise au champ électrique ?
3. Quelle est la nature du mouvement dans la zone (d) ?
4. Déterminer la position du point d'impact de l'électron sur le plan récepteur (R) perpendiculaire à l'axe horizontal.



Nota : On néglige l'influence de la pesanteur dans la totalité du domaine $(l + d)$.

PS 11	*EXAMEN FINAL*	Automne 2003
	MECANIQUE DU POINT	

Mardi 20 janvier 2004

Les réponses doivent être justifiées et les calculs explicités.

Calculette autorisée.

Exercice 1 :

Dans un repère cartésien orthonormé $Oxyz$, la position d'un point M est déterminée par les équations paramétriques :

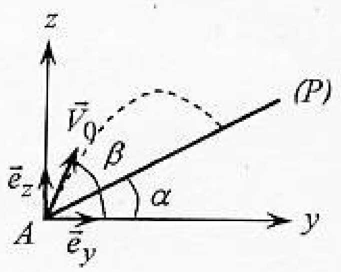
$$x = e^{-t} \cos t \qquad y = e^{-t} \sin t \qquad z = e^{-t}$$

1. Déterminer à l'instant t :
   - 1.1. Les expressions des vecteurs vitesse et accélération.
   - 1.2. Les modules des deux vecteurs précédents.
   - 1.3. Le vecteur unitaire tangent $\vec{T}$, le rayon de courbure R et le vecteur unitaire normal $\vec{N}$.

2. Soit m la projection orthogonale de M sur le plan xOy.
   Déterminer le mouvement de M.
   Pour cela, on utilisera les relations de passage entre les coordonnées cartésiennes et polaires, et on déterminera la relation $r = f(\theta)$ donnant le rayon polaire en fonction de l'angle polaire.

Exercice 2 :

Un projectile M de masse m est lancé à partir d'un point A, avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ (de module V_0) faisant un angle β avec l'horizontale.
La résistance de l'air est négligeable et la pesanteur est supposée constante $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.
On considère d'autre part un plan matériel *(P)* incliné d'un angle α ($\alpha < \beta$) avec l'horizontale.



1. Déterminer le vecteur position de M à un instant quelconque.
2. Déterminer l'instant où le projectile M rencontre le plan (P).
3. Soit B le point de rencontre. Montrer que la distance $d = AB$ peut s'écrire : $d = \dfrac{2V_0^2 \cos\beta \sin(\beta - \alpha)}{g \cos^2 \alpha}$

Rappel : $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$.

Exercice 3 :

Un point matériel M, de masse unité se déplace dans le champ de force défini par :

$$\vec{F} = \left(3t^2 - 4t\right)\vec{e}_x + (12t - 6)\,\vec{e}_y - \left(6t - 12t^2\right)\vec{e}_z$$

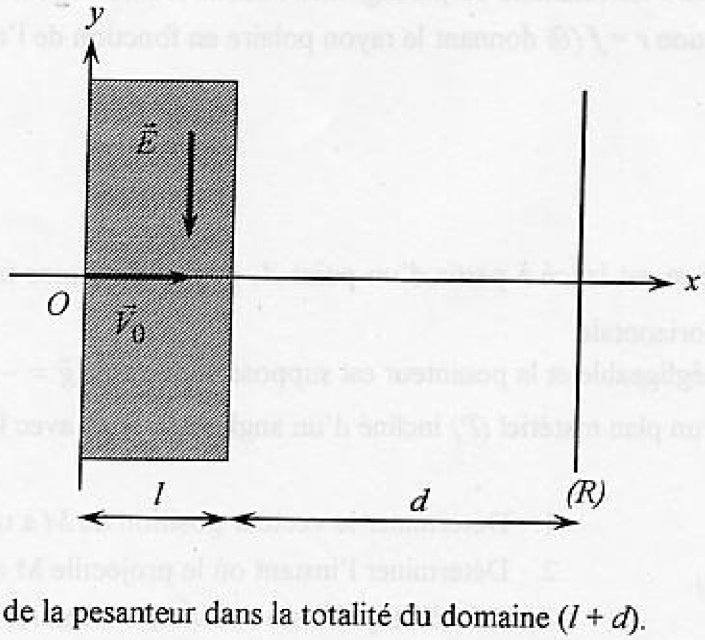
1. Calculer la variation de quantité de mouvement entre les instants $t = 1$ et $t = 2$.
2. Sachant que la vitesse à l'instant $t = 1$ est $\vec{V}_{t=1} = 4\,\vec{e}_x - 5\,\vec{e}_y + 10\,\vec{e}_z$

   Calculer la vitesse à l'instant $t = 2$.
3. En supposant que le point matériel se trouve à l'origine O du repère à $t = 0$, calculer le moment cinétique par rapport à O à l'instant $t = 2$.

Exercice 4:

Un électron M de masse m et de charge $-e$ pénètre, à l'instant initial, avec la vitesse $\vec{V}_0 = V_0\,\vec{e}_x$ dans une région de l'espace (hachurée sur la figure) où règne un champ électrique $\vec{E} = -E\,\vec{e}_y$ constant. Cet électron est donc soumis à la force $\vec{F} = -e\,\vec{E}$.

1. Déterminer l'équation de la trajectoire dans cette zone.
2. Quelle est l'ordonnée de M en sortie de la zone soumise au champ électrique ?
3. Quelle est la nature du mouvement dans la zone *(d)* ?
4. Déterminer la position du point d'impact de l'électron sur le plan récepteur *(R)* perpendiculaire à l'axe horizontal.



Nota : On néglige l'influence de la pesanteur dans la totalité du domaine $(l + d)$.