PS 11 <u>*EXAMEN FINAL*</u> **Automne 2004**

MECANIQUE DU POINT

Mercredi 19 janvier 2005

Les réponses doivent être justifiées et les calculs explicités.
Calculette autorisée.

<u>Exercice 1 :</u>

Un avion humanitaire vole à une altitude de $h = 6000$ m à la vitesse $V_0 = 750$ Kmh $^{-1}$. Il laisse tomber un colis de masse m en passant à la verticale d'un point A.

1. Déterminer le temps nécessaire pour que le colis atteigne le sol.
2. Quelle est la distance parcourue par l'avion pendant ce temps ?
3. A quelle distance du point A se trouve le colis lorsqu'il arrive au sol ?
4. On considère à présent que l'avion à initialement une trajectoire inclinée vers le bas d'un angle $\beta = 10°$ par rapport à la verticale. Reprendre les questions 1 et 3 dans cette nouvelle situation.
5. En conservant les conditions de la question précédente, déterminer la hauteur à laquelle doit avoir lieu le largage du colis pour qu'il tombe à moins de 100 m du point A.

<u>Exercice 2 :</u>

Dans un plan vertical, on considère un axe Oy horizontal et un axe Ox orienté suivant la verticale descendante. Un point matériel M de masse m glisse sans frottement sur une paroi parabolique d'équation $y^2 = 2\,Px$, (avec P = cte). On désigne par θ l'angle que fait en un point quelconque de la trajectoire, la tangente à la paroi avec l'axe Oy. Le rayon de courbure est $R = \dfrac{P}{cos^3\,\theta}$ et la force de réaction du support sur le point M sera notée $\vec{F}$. Le point M est initialement lancé en O avec une vitesse V_0 puis abandonné à lui même.

1. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique, en projection dans le repère de Frenet $\left(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\right)$.
2. A l'aide du théorème de l'énergie cinétique, exprimer la vitesse V du point M en fonction de V_0, g et x.
3. Exprimer les coordonnées x et y du point M en fonction de P et θ.
4. Exprimer alors la vitesse trouvée à la question 2, en fonction de V_0, g, P, θ.
5. Exprimer $\vec{F}$ en fonction de $m, V_0, g, P, \theta, \vec{N}$.
6. Commenter le résultat précédent dans le cas où $P = \dfrac{V_0^2}{g}$.

<u>Remarques</u> : Les questions 2, 3 et 4 sont indépendantes de la question 1.

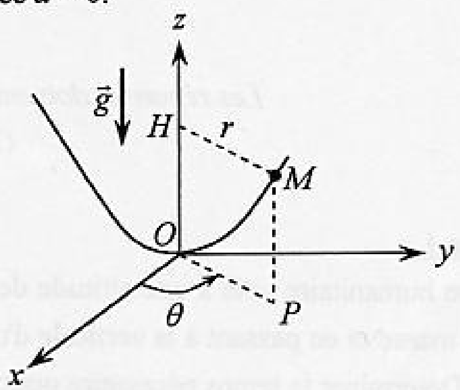
$$cos^2\,x = \frac{1}{1 + tan^2\,x}$$

Exercice 3 :

On considère une surface qui a la forme d'un paraboloïde de révolution d'axe vertical ascendant Oz, dont l'équation en coordonnées cylindriques (r, θ, z) est $r^2 - az = 0$, avec $a > 0$.

Un point matériel M de masse m, peut se déplacer sans frottement sur cette surface, sous l'effet de la pesanteur.

Compte tenu de la symétrie du problème, on utilisera la base $B_c = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ comme base de projection.



1. Exprimer la vitesse de M dans la base Bc.

Partie A : Moment cinétique

2. Déterminer l'expression du moment cinétique de M en O et sa projection sur l'axe Oz.
3. Montrer que la réaction $\vec{R}$ de la surface sur le point M est contenue dans le plan OHP.
   En déduire que le moment de cette force par rapport à O est porté par $\vec{e}_\theta$.
4. Calculer le moment par rapport à O de la force de pesanteur.
5. En appliquant le théorème du moment cinétique en O, sous forme vectorielle, montrer que la projection du moment cinétique sur Oz est constante.

Partie B : Energie

6. Quelle est l'expression de l'énergie cinétique de M ?
7. Justifier l'existence d'une énergie potentielle Ep dont dérivent les forces extérieures agissant sur M.
   Exprimer Ep en fonction de z, en supposant que $Ep\ (O) = 0$
8. Que peut-on dire de l'énergie mécanique de M.

Remarque : Les parties A et B sont indépendantes.

Exercice 4 :

Soit une trajectoire C décrite par $\vec{r} = 3\cos 2t\,\vec{i} + 3\sin 2t\,\vec{j} + (8t - 4)\vec{k}$.

Déterminer le vecteur unitaire tangent, le rayon de courbure et le vecteur unitaire normal à cette trajectoire.