PS11 – P2004

Final de Mécanique

Exercice 1

Une automobile se trouvant à 5m devant un feu rouge démarre lorsque le feu passe au vert avec une accélération de 2,5 m/s². Lorsque le feu passe au vert, un camion roulant à la vitesse constante de 45 km/h se trouve à une distance de 25 m devant le feu. Il maintient sa vitesse constante. Dans un premier temps, le camion va doubler l'automobile puis il sera dépassé par la voiture un peu plus tard.
On choisit comme origine des temps l'instant où le feu passe au vert et comme origine des espaces, le point O correspondant à la position du feu.

1. Faire un croquis de la situation à l'instant initial. On prendra Ox comme axe horizontal.
2. Etablir l'expression de la vitesse de la voiture en fonction du temps. Compléter la feuille jointe pour représenter sur un graphique les deux vitesses (camion et voiture) en fonction du temps.
3. Etablir les équations horaires du camion et de la voiture. Compléter la feuille jointe pour représenter sur un graphique ces deux expressions en fonction du temps.
4. A partir des graphiques, déterminer les dates de dépassements (du camion qui double la voiture et de la voiture qui double le camion), les distances correspondant au premier dépassement et au deuxième dépassement ainsi que la vitesse de l'automobile à chaque dépassement.
5. Retrouver ces valeurs par le calcul.

Exercice 2

Dans un repère fixe R(Oxyz), un mobile M de masse m, qui se trouve dans le plan (xOy), tourne autour de l'axe Oz dans le trigonométrique sur un cercle de rayon R. La position de M est repérée en coordonnées polaires et la norme de sa vitesse v est liée à l'angle θ par la relation $v^2 = v_0^2\,(1-\sin\theta)$, v_0 constante positive. La force appliquée $\vec{F}$ au mobile M est une force conservative.

1- Donner la relation entre vitesse linéaire et vitesse angulaire. Exprimer la vitesse angulaire de M en fonction de v_0, R et θ.

2- Déterminer alors l'accélération angulaire $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ de M en fonction de v_0, R et θ.

3- Exprimer, dans la base des coordonnées polaires, les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, du vecteur vitesse $\vec{v}$ et du vecteur accélération $\vec{a}$ de M en fonction de v_0, R et θ.

4- Montrer alors que les composantes de la force $\vec{F}$ appliquée au mobile M s'écrivent :

$$\vec{F} = -\frac{m v_0^{\,2}}{2R}[2\,(1-\sin\theta)\,\vec{e_r} + \cos\theta\,\vec{e_\theta}\,]$$

5- Calculer la puissance instantanée de $\vec{F}$ en fonction de v_0, m et θ et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

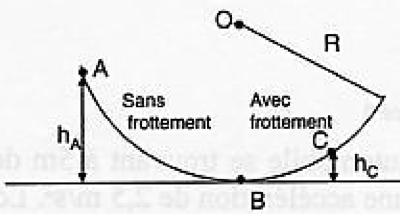
6- Calculer le travail de $\vec{F}$ lorsque le mobile se déplace de A ($\theta_A = -\frac{\pi}{2}$) vers M (θ).

7- En déduire l'énergie potentielle du mobile en M en supposant qu'elle est nulle en A.

8- Exprimer l'énergie mécanique en M et montrer que cette énergie est constante.

Exercice 3

Une bille de masse m se déplace le long d'une courbe circulaire de rayon r dans le plan vertical. La bille part du point A, à l'altitude h_A avec une vitesse initiale nulle. On pose que l'énergie potentielle est nulle au sol (h_B =0). L'angle est nul sur la verticale et compté positivement dans le sens trigonométrique.



Données : m = 10 g, g = 9,8 m/s², h_A = 5 m, h_C = 3m
r = 8 m

A – Parcours de la bille de A vers B : La bille glisse sans frottement de A en B

1. Faire un schéma des forces qui s'appliquent à la bille en un point M situé entre A et B.
2. Exprimer et calculer la vitesse de la bille en B en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.
3. Calculer l'énergie mécanique au point A et celle au point B. Conclure.
4. Calculer la valeur de la réaction en B (on pourra choisir le repère de Frenet pour le calcul).

B – Parcours de la bille de B vers C : La bille remonte ensuite de B jusqu'au point C d'altitude h_C où elle s'arrête. Sur ce parcours, elle est soumise à une force de frottement f.

1. Faire un schéma des forces qui s'appliquent à la bille en un point M situé entre B et C
2. Calculer l'angle θ_C lorsque le mobile est en C ne fonction de R et h_C.
3. Exprimer le travail du poids $W_{\vec{P}}$ sur le parcours BC en fonction de m, g et h_C.
4. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique entre B et C, exprimer le travail de la force de frottement $W_{\vec{f}}$ en fonction de m, g, h_A, h_C sur le parcours BC. Le travail est-il moteur ou résistant ?
5. Calculer la valeur de la force de frottement au point C après l'arrêt.

Exercice 4

On considère un ressort placé horizontalement sur un support. Une masse m = 5 kg est accrochée à l'extrémité du ressort et se déplace sous l'action de deux forces: l'une est de rappel $\vec{F} = -40x\vec{i}$ et l'autre est d'amortissement $\vec{F}_1$. A l'instant initial la masse m se trouve en x_0 = 0,2 m par rapport à la position d'équilibre avec une vitesse nulle.

1. En supposant que la force d'amortissement s'écrit $\vec{F}_1 = -f\,v\,\vec{i}$,

   a. Faire un schéma du système et représenter les forces qui s'appliquent à la masse à la position x_0.

   b. Ecrire l'équation fondamentale de la dynamique et déterminer l'équation du mouvement par projection sur l'horizontale.

   c. Déterminer pour quelles valeurs de f le mouvement sera :
   apériodique? critique? oscillatoire amorti?

2- En supposant maintenant que la force d'amortissement s'écrit $\vec{F}_1 = -20v\,\vec{i}$

   a. Trouver les racines de l'équation caractéristique associée.

   b. Donner la solution de cette équation différentielle.

Rappel : $\sin(a) = \cos(\frac{\pi}{2} - a)$ et $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2}).\cos(\frac{a-b}{2})$

   c. Quelles sont la pulsation, l'amplitude et la période?

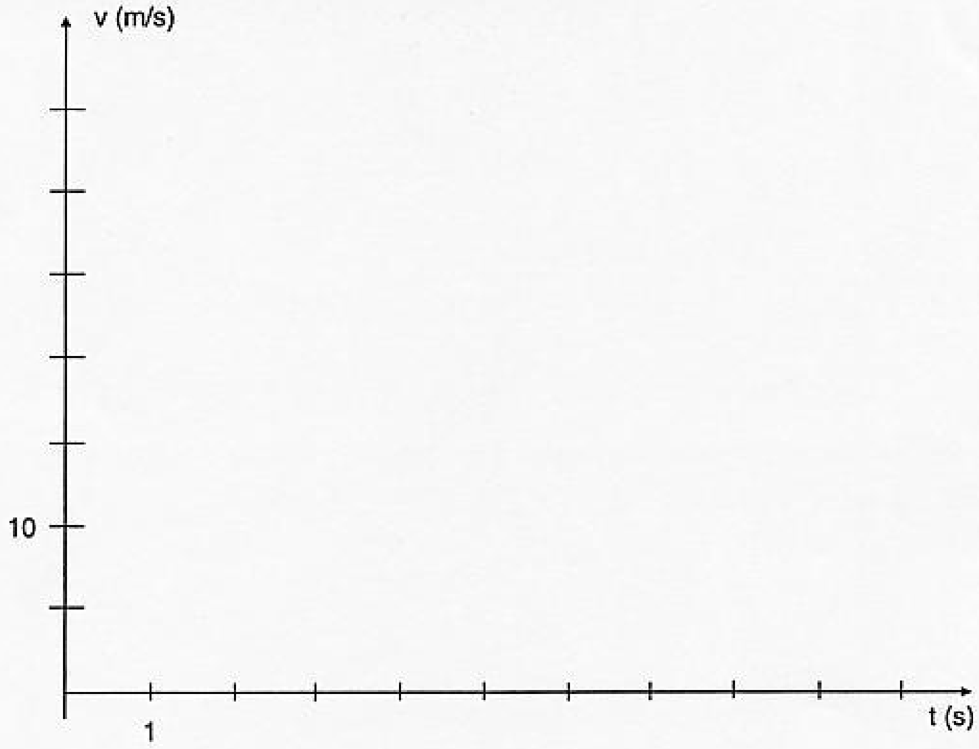
3. En supposant maintenant que la force d'amortissement s'écrit $f = 20\sqrt{2}$, résoudre l'équation différentielle et donner la solution de l'équation du mouvement.

PS11 – P2004

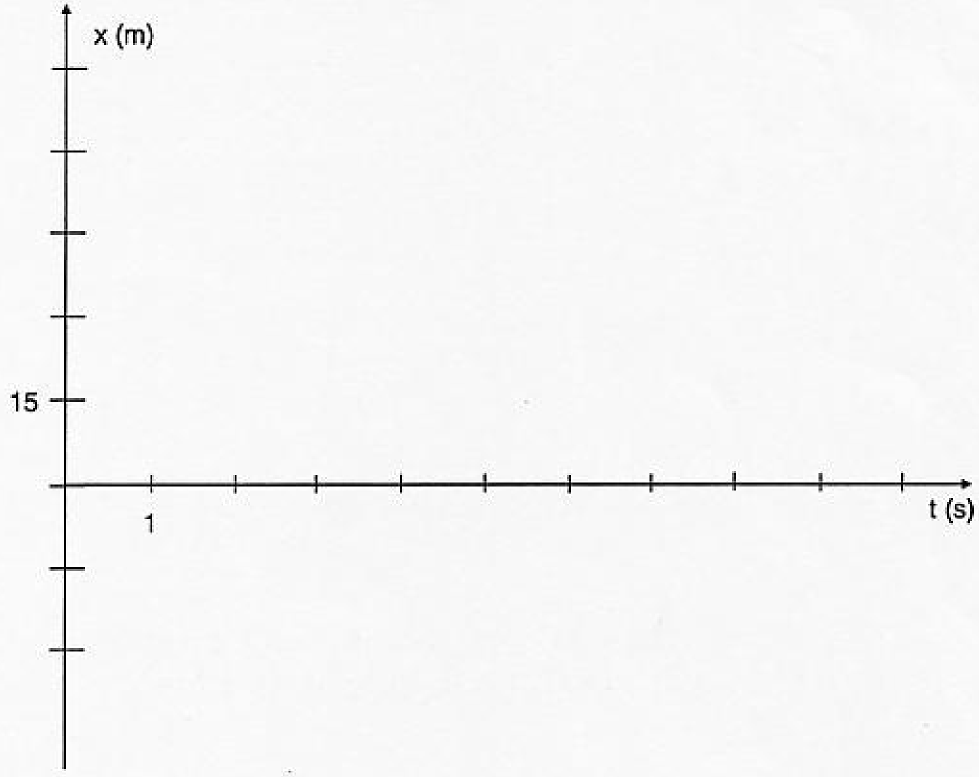
NOM : **Prénom :**

Exercice 1

2 - Représentation des vitesses du camion et de la voiture



3 – Représentation des équations horaires de la voiture et du camion.

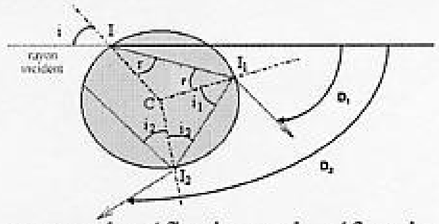


PS11 – P2004

Médian d'Optique

Exercice 1 : Arc en ciel

L'arc-en-ciel naît des réflexions et réfractions de la lumière du soleil à travers les gouttes d'eau dans les nuages. On représente une goutte d'eau par une sphère d'indice n = 1,33. L'observateur voit l'ensemble des lumières réémises par toutes les gouttes constituant le nuage. Pour simplifier l'étude on supposera travailler en lumière monochromatique.



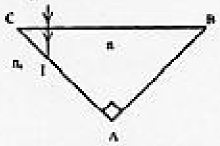
1. Enoncer les lois de Descartes concernant la réflexion et la réfraction.
2. Définir ce qu'est la réflexion totale et l'angle limite de réfraction. Montrer qu'elle n'est pas possible en I_1 et en I_2.
3. On considère un rayon incident ne subissant aucune réflexion dans la goutte donc sortant en I_1. Exprimer la déviation D_1 d'un rayon sortant en fonction de i et de r.
4. On considère maintenant une seule réflexion dans la sphère, donc le rayon sortant en I_2. Quelle est la déviation D_2 d'un rayon sortant en fonction de i et r?

On s'intéresse au rayon sortant en I_2 pour la suite du problème.

5. Exprimer la dérivée dD/di (attention r dépend de i) et montrer que la déviation D_m passe par un extremum lorsque di/dr = 2. On admet que cet extremum est un minimum.
6. En dérivant la loi de Descartes, exprimer di/dr en fonction de cos(i), cos(r) et n.
7. Pour une certaine valeur de i = i_0, la déviation passe par un minimum. Montrer alors que la valeur de r correspondante (r_0) vérifie la relation : $\cos(i_0) = \dfrac{n\ \cos(r_0)}{2}$.
8. Calculer i_0, r_0 et D_m.

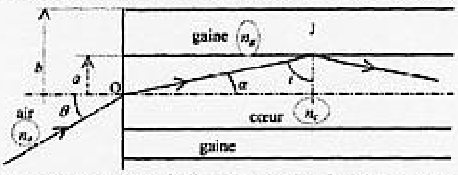
Exercice 2 : Fibre optique

Un prisme a une section principale en forme de triangle isocèle. Il est en verre d'indice n=1,52 et se trouve dans l'air d'indice n_a.



1. Indiquer dans les cas suivants le trajet du rayon lumineux au delà de I lorsque le milieu ambiant est l'air n_a=1 puis lorsque le milieu ambiant est l'eau n_e= 1,33.

Une fibre optique à saut d'indice est constituée d'un coeur, de rayon a et d'indice de réfraction n_c et d'une gaine de rayon b et d'indice de réfraction n_g. La fibre est placée dans l'air.

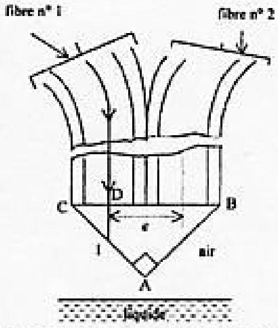


2. Indiquer la condition à laquelle doit satisfaire l'angle i pour que le rayon soit totalement réfléchi en J. Donner l'expression de sin(i) en fonction de n_c et n_g.
3. En déduire que l'angle θ doit rester inférieur à une valeur limite θ_l. Donner l'expression de $\sin(\theta_l)$ en fonction de cos(i), n_c et n_a.

4. Montrer que la relation suivante est vérifiée : $\sin^2\theta_1 = n_c^2 - n_g^2$. Calculer θ_1 si $n_c=1,5$ et $n_g= 0,99\ n_c$.

5.

Deux fibres optiques semblables à celle de la question ci-dessus sont aboutées à la base BC du prisme de la question 1. La fibre 1 conduit la lumière d'une source lumineuse jusqu'au prisme. La fibre 2 conduit la lumière qui sort du prisme jusqu'à un détecteur. La distance entre les axes des deux fibres est e= 10 mm. CD= 0,25 BC. Le dispositif est progressivement enfoncé dans un liquide d'indice $n_a=1,33$ situé dans une cuve.

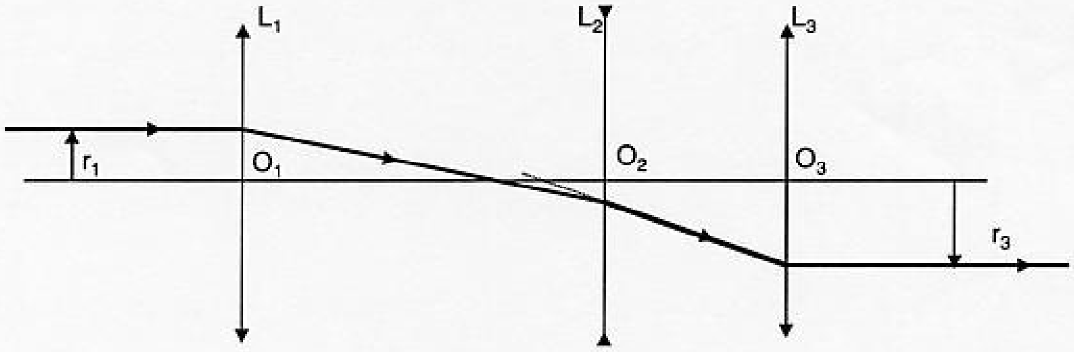


6. Préciser sur un schéma le trajet du rayon lumineux après le point I tant que le niveau du liquide n'atteint pas le point I.
7. Expliquer ce qui se passe lorsque le niveau du liquide atteint le point I. Trouver une application possible.

Exercice 3 : Etendeur de faisceau

Un étendeur de faisceau est constitué de 3 lentilles minces L_1, L_2, L_3, respectivement de centre optique O_1, O_2, O_3 et de distances focales images f'_1, f'_2, f'_3 .Les lentilles L_1 et L_3 sont convergentes, la lentille L_2 est divergente. On pose $\Delta = \overline{O_1O_2}$ et $\delta = \overline{O_2O_3}$. Ces distances sont réglées de manière à ce que le système donne d'un faisceau cylindrique de rayon r_1 parallèle à l'axe optique un faisceau cylindrique de rayon r_3 parallèle à l'axe optique.

1. Dans ces conditions, quelle est l'image du foyer F'_1 de la lentille L_1 par la lentille L_2?
2. A partir des formules de conjugaison des lentilles, donner une relation entre Δ, δ, f'_1, f'_2, f'_3.
3. Exprimer le rapport $\frac{r_3}{r_1}$ en fonction des données précédentes. Puis exprimer δ et Δ en fonction des focales.
4. Application numérique : $f'_1 = 20$ mm, $f'_2 = -20$ mm , $f'_3 = 200$ mm, $\frac{r_3}{r_1} = -20$. Calculer la distance Δ, la distance δ et la valeur de l'encombrement $d = \overline{O_1O_3}$ du système.



Exercice 4 : Tracé de rayon et calcul

Compléter la feuille en annexe