

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **5**

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on ne demande aucune justification.

Barème : Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point. Une question sans réponse ne rapporte et n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est ramenée à 0.

Partie A :

Dans cette partie, pour chaque question, indiquer sur votre copie le numéro de la question et préciser en toutes lettres, sans justifier votre choix, VRAI ou FAUX ou ON NE PEUT PAS REpondre.

On connaît le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty [$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$		
$f(x)$	-2	\nearrow	$+\infty$	\parallel	$-\infty$	\nearrow	5	\searrow	1

1. La droite d'équation $x = -2$ est asymptote à la représentation graphique de f .
2. L'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions dans D_f .
3. Pour tout x appartenant à $]1 ; 3 [$, $f'(x) > 0$ (f' désigne la fonction dérivée de f sur D_f).
4. Toute primitive de f sur $[3 ; 8]$ est décroissante.
5. La fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ est décroissante sur $[3 ; +\infty [$.

Partie B :

Dans cette partie, pour chaque question, trois propositions sont formulées. Une seule d'entre elles convient. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier la proposition qui vous semble exacte, sans justifier votre choix.

Soit la fonction g définie par : $g(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1}$ et C sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. L'ensemble de définition D_g de g est égal à :
a) $]0 ; +\infty [$ b) $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ c) $\mathbf{R} \setminus \{1\}$
2. L'équation $g(x) = 3$ admet pour solution :
a) e^3 b) $\ln 3$ c) Aucune solution
3. La limite de g en $+\infty$ est :
a) -1 b) $+\infty$ c) 2

Exercice 2 (5 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une entreprise de services d'une ville cherche à modéliser la consommation des ménages sur les dernières années.

Le rang $x_1 = 1$ est donné pour l'année 1998. La consommation est exprimée en milliers d'euros.

Année	1998	2000	2001	2002	2004
Rang de l'année x_i	1	3	4	5	7
Consommation en milliers d'euros y_i	28,5	35	52	70,5	100,5

1. Représenter le nuage de points $P_i(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal du plan (on prendra 1cm comme unité en abscisses et 1cm pour 10 000 € en ordonnées).
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage ; le placer dans le repère précédent.
3. On réalise un ajustement affine de ce nuage par la droite D d'équation $y = 12,5x + b$ qui passe par le point G.
 - a) Déterminer la valeur de b .
 - b) Tracer la droite D dans le repère précédent.
4. Déterminer, à l'aide de l'ajustement précédent, la consommation estimée des ménages de cette ville en 2005.
5. En réalité, un relevé récent a permis de constater qu'en 2005 la consommation réelle des ménages de cette ville était de $y_8 = 140\ 000$ €. Déterminer, en pourcentage, l'erreur commise par l'estimation précédente par rapport à la valeur exacte (on donnera un résultat à l'aide d'un nombre entier en effectuant un arrondi).
6. Un nouvel ajustement de type exponentiel semble alors plus adapté.
 - a) Recopier et compléter le tableau suivant sachant que $z = \ln y$. Les résultats seront arrondis au centième.

x_i	1	3	4	5	7	8
$z_i = \ln y_i$	3,35	4,94

- b) Déterminer l'équation réduite de la droite de régression de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés à l'aide de la calculatrice ; cette équation est de la forme $z = cx + d$; on donnera les arrondis des coefficients c et d à 10^{-2} .
- c) En déduire que : $y = 20,49 e^{0,23x}$.
- d) Estimer alors, à l'aide de ce nouvel ajustement, la consommation des ménages de cette ville en 2007 à 100 € près.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Madame Boulard fait un très grand élevage de chats de races. Elle possède des Siamois, des Birmans et des Abyssins. Le printemps dernier, pratiquement toutes ses femelles ont eu des bébés et Madame Boulard a mis une annonce pour signaler qu'elle avait une très grande quantité de petits chatons à vendre.

On sait que :

- 32% des chatons sont des Siamois, 54% des chatons sont des Abyssins et le reste est constitué de Birmans.
- Parmi les Siamois, 54% sont des mâles.
- 66% des Abyssins sont des femelles.
- Il y a au total 40,96% de chatons mâles.

Un petit garçon, Pierre, vient acheter un chaton avec sa mère. Comme ils sont tous adorables et qu'il n'arrive pas à choisir, Pierre décide de le prendre au hasard.

On désigne par S, B, A, M et F les événements suivants :

S : « Pierre achète un chaton Siamois ».

B : « Pierre achète un chaton Birman ».

A : « Pierre achète un chaton Abyssin ».

M : « Pierre achète un chaton mâle ».

F : « Pierre achète un chaton femelle ».

1. a) Traduire les données de l'énoncé en langage de probabilités.
b) Construire un arbre illustrant la situation, en indiquant sur chaque branche les probabilités données dans l'énoncé. Les probabilités manquantes seront calculées dans les questions ultérieures.
2. a) Déterminer la probabilité que Pierre achète un chaton mâle Siamois.
b) Calculer $p(M \cap A)$ et interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.
c) En déduire que la probabilité que Pierre achète un chaton mâle Birman est égale à 0,0532.
d) Le chaton acheté par Pierre est un Birman. Quelle est la probabilité que ce soit un mâle ?
3. Finalement, Pierre est tellement séduit par ces chatons qu'il décide d'en acheter trois, toujours au hasard. On assimilera ces achats à des tirages successifs avec remise. Quelle est la probabilité qu'il y ait, parmi ces trois chatons, exactement deux mâles Birmans (*le résultat sera arrondi à 10^{-3}*)?

Exercice 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; + \infty[$ par : $f(x) = 5 \frac{\ln x}{x} + 3$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. a) Déterminer la limite de f en 0 ; en donner une interprétation graphique.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$; en donner une interprétation graphique.

2. a) Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f , puis étudier son signe.
b) En déduire le tableau de variation de la fonction f . On y indiquera les limites aux bornes de l'intervalle de définition de f ainsi que la valeur exacte de $f(e)$.

3. a) Déterminer une primitive de f sur $]0 ; + \infty[$.
On pourra remarquer que $f(x) = 5u'(x) \times u(x) + 3$ avec $u(x)$ à préciser.
b) En déduire la valeur exacte de $I = \int_2^4 f(t) dt$ sous la forme $a(\ln 2)^2 + b$ avec a et b deux réels à déterminer.

4. a) Préciser le signe de f sur l'intervalle $[2; 4]$.
b) Donner une interprétation graphique de I .

5. On admet que le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique x milliers de pièces est égal à $f(x)$.
En utilisant les résultats précédents, déterminer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 2000 et 4000 pièces. On donnera une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près.

CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

**ELEMENTS DE CORRECTION
 BARÈME PROPOSÉ**

N.B. : il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles s'appliquent à son contenu.

Commun à tous les candidats

Exercice 1	4 points	Barème
Partie A		5 × 0,5
Partie B		3 × 0,5

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Exercice 2	5 points	Barème														
1.		0,5														
2.	$G(4 ; 57,3)$	0,5														
3.a	$b = 7,3$	0,5														
3.b		0,5														
4.	107,3 milliers d'euros	0,5														
5.	23%	0,5														
6.a	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>x_i</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>7</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>z_i</td> <td>3,35</td> <td>3,56</td> <td>3,95</td> <td>4,26</td> <td>4,61</td> <td>4,94</td> </tr> </table>	x_i	1	3	4	5	7	8	z_i	3,35	3,56	3,95	4,26	4,61	4,94	0,5
x_i	1	3	4	5	7	8										
z_i	3,35	3,56	3,95	4,26	4,61	4,94										
6.b	$z = 0,23x + 3,02$	0,5														
6.c	$y = e^{3,02} \times e^{0,23x} \approx 20,49e^{0,23x}$	0,5														
6.d	$x = 10$, la consommation serait environ de 204 400€. <i>On acceptera toute réponse en cohérence avec ce qui précède.</i>	0,5														

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Exercice 2	5 points	Barème																																				
1.a	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td></td> <td>A</td> <td>B</td> <td>N</td> <td>R</td> <td>T</td> </tr> <tr> <td>A</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>2</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>2</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>N</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>0</td> <td>2</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>R</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>T</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </table>		A	B	N	R	T	A	0	1	2	2	1	B	2	0	1	2	1	N	1	2	0	2	1	R	2	1	1	0	2	T	3	2	2	1	0	1
	A	B	N	R	T																																	
A	0	1	2	2	1																																	
B	2	0	1	2	1																																	
N	1	2	0	2	1																																	
R	2	1	1	0	2																																	
T	3	2	2	1	0																																	
1.b	Le diamètre du graphe est 3 ; il faut un trajet en trois étapes pour aller de Tunis à Alger.	0,5																																				
2.	$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	1																																				
3.a	Deux voyages : R–B–N–T ; R–N–A–T.	0,5+0,5																																				
3.b	$3+2+5+6=16$, d'où 16 voyages.	0,5																																				
4	Algorithme bien présenté. Le chemin le plus court est R–N–A–T.	1																																				

Commun à tous les candidats

Exercice 3	5 points	Barème
1.a	$P(S) = 0,32 ; P(A) = 0,54 ;$ $P_S(M) = 0,54 ; P_A(F) = 0,66 ; P(M) = 0,4096.$	1
1.b		0,5
2.a	$P(M \cap S) = 0,54 \times 0,32 = 0,1728$	0,5
2.b	$P(M \cap A) = 0,54 \times 0,34 = 0,1836$. C'est la probabilité de l'événement « Pierre achète un chaton mâle abyssin ».	0,5 + 0,5
2.c	$P(M \cap B) = 0,0532$	0,5
2.d	$P_B(M) = \frac{P(B \cap M)}{P(B)} = \frac{0,0532}{0,14} = 0,38$	0,5
3.	$3 \times 0,0532^2 \times 0,9468 \approx 0,0080$	1

Commun à tous les candidats

Exercice 4	6 points	Barème
1.a	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$. L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe.	0,5+0,5
1.b	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$. La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à la courbe.	0,5+0,5
2.a	$f'(x) = 5 \frac{1 - \ln x}{x^2}$ et étude du signe.	0,5+0,5
2.b	Tableau de variation	0,5
3.a	$F(x) = \frac{5}{2} (\ln x)^2 + 3x$	0,5
3.b	$I = \frac{15}{2} (\ln 2)^2 + 6$	0,5
4.a	$f(x) > 0$ dans l'intervalle $[2 ; 4]$.	0,5
4.b	I représente la mesure de l'aire du domaine délimité par les droites d'équations $x=2$, $x=4$, $y=0$ et par la courbe.	0,5
5.	$\frac{1}{4-2} \int_2^4 f(t) dt = \frac{7,5(\ln 2)^2 + 6}{2} \approx 4,802$. Le bénéfice moyen cherché est de 4800 euros. <i>On acceptera toute valeur approchée à 100€ près.</i>	0,5