Final de PS20

Sans documents ni calculatrices, durée 1h45

Exercice 1, chute libre

Le référentiel terrestre $R_0(O, b(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0))$ avec $\vec{z}_0$, vertical ascendant est choisi pour repère galiléen dans tout ce problème. On souhaite étudier le mouvement d'une goutte d'eau assimilée à un point P, de masse m, dans deux situations :

- la masse d'air est immobile
- la masse d'air se déplace d'un mouvement de translation uniforme par rapport à R_t.

On adopte le paramétrage suivant :

$\overrightarrow{OP} = x(t)\vec{x}_0 + y(t)\vec{y}_0 + z(t)\vec{z}_0$, avec à l'instant $t = t_0$, les conditions initiales :

$\overrightarrow{OP}(t=0) = h\vec{z}_0, \vec{V}(P)/R_t = \vec{0}$

On associe aux particules d'air le repère $R_1(A, b(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0))$. On note $\vec{V}_{01}(M) = V\vec{x}_0, V = cte$, la vitesse de déplacement de toute particule M d'air, par rapport à R_0.

Les actions mécaniques prises en compte sont :

La pesanteur, et l'action de l'air sur la goutte d'eau notée :

$\vec{T} = -\nu\vec{V}(P)/R_1, \nu = cte > 0$.

I) la masse d'air est immobile par rapport au sol soit $V = 0$.

I.1) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la goutte d'eau

I.2) Par intégration des trois équations différentielles précédentes, déterminer

a) $\vec{V}(P)/R_0$, puis le vecteur position $\overrightarrow{OP}$.

b) préciser la nature de la trajectoire (cercle, ellipse,... ?)

c) Montrer l'existence d'une vitesse asymptotique, lorsque le temps devient grand.

II) la masse d'air se déplace par rapport au sol avec une vitesse $V \neq 0$

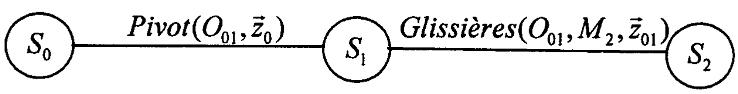
Reprendre les questions précédentes, en modifiant simplement la question I .2.b, qui devient :

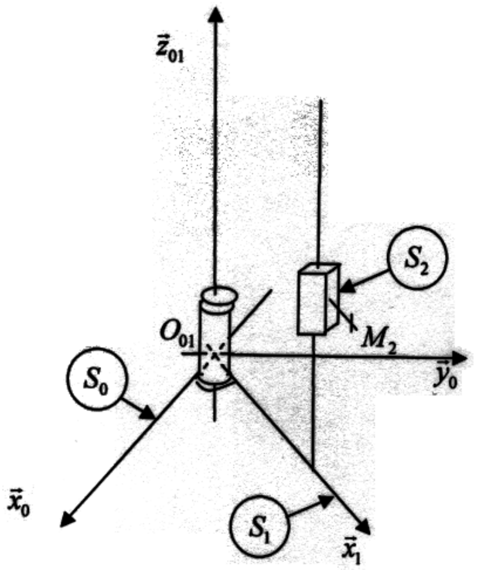
Préciser la nature de la trajectoire du point P par rapport à R_0, lorsque le temps devient grand.

<u>Remarque</u> : on rappelle la solution de l'équation différentielle : $\frac{d}{dh}f(h) + \lambda f(h) = a$, avec $a = cte$,est $f(h) = \frac{a}{\lambda} + be^{-\lambda h}$, ou b est une constante à déterminer en fonction des conditions initiales si h représente le temps.

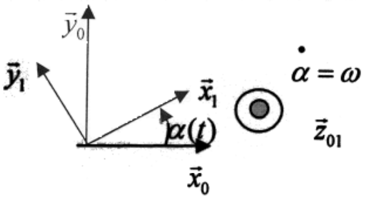
Exercice II, modélisation d'un manège

Un manège est constitué d'un disque S_1 de centre O_{01}, de rayon R, tournant autour de l'axe $D(O_{01}, \vec{z}_{01})$, à la vitesse uniforme $\vec{\Omega}_{01} = \omega\vec{z}_0$. Le référentiel $R_0(O, b_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0))$ est lié au bâti du manège. Un cheval de bois S_2 se déplace en translation alternative par rapport au disque. On adopte le paramétrage suivant compatible avec toutes les liaisons:





les repères : $R_0(O_{01}, b_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_{01}))$, $R_1(O_{01}, b_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{01}))$, $R_2(M_2, b_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{01}))$
paramétrage des bases :



Paramétrage des points :
$\overrightarrow{O_0M_2} = a\vec{x}_1 + b(t)\vec{z}_{01}$ avec $b(t) = c(1+\sin(4\omega t))$, a une constante.

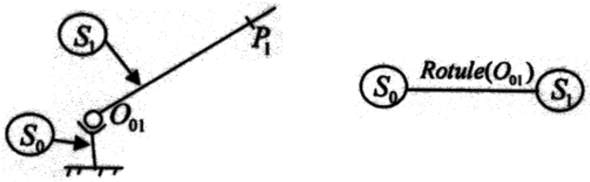
On demande :

I) Déterminer l'expression des torseurs cinématiques naturellement associés à ce paramétrage.

II) Déterminer $\vec{V}_{02}(M_2)$, par dérivation directe, puis par composition des mouvement. Le mouvement d'entrainement est celui de R_1 par rapport à R_0.

III) Calculer les accélérations : $\vec{\gamma}_{02}(M_2), \vec{\gamma}_{12}(M_2), \vec{\gamma}_{01}(M_2)$. Rappeler et vérifier la relation de composition entre ces trois accélérations.

Exercice III) paramètrage d'Euler



I) paramétrer la chaine cinématique en utilisant les angles d'Euler.

II) En utilisant votre paramétrage, donner l'expression du torseur cinématique $\{\vartheta_{01}\}$ par ses éléments de réduction en P_1

III) Donner l'expression de $\vec{\gamma}_{01}(P_1)$