utbm université de technologie Belfort-Montbéliard

MT 26

Final Automne 06

Mardi 16 janvier 2007

Matériel autorisé: uniquement une feuille aide-mémoire A4 recto

Les deux parties doivent être rendues sur deux feuilles séparées

I. Première partie (2 + 5 + 3 points)

1°) Petit exercice d'échauffement :

a) Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière : $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$

b) Une fonction f continue de période T = 2π égale à x² sur]-π,+π] a pour développement de Fourier : $f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$. Calculer les sommes $S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ et $S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

2°) Soit la fonction f, de période 2π définie par $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in[0,\pi[\\ 0 & \text{si } x\in[\pi,2\pi[\end{cases}$.

a) Représenter graphiquement cette fonction.

b) Calculer les coefficients de Fourier de f, et écrire la somme de Fourier.

c) En déduire le calcul de :

$S_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ puis les sommes $S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$, $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ et $S_3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

d) Pour n∈N, calculer les valeurs de $\left((-1)^n-1\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ puis $(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. En déduire aussi la somme $S_4=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}$.

e) Montrer que $\forall x\in]-\pi,+\pi[\ \ f(x)=\left|\frac{x}{2}\right|+\frac{x}{2}$. En déduire les développements en série de Fourier des fonctions p et i périodiques de période 2π telles que : $\forall x\in]-\pi,+\pi]\ \ p(x)=\left|\frac{x}{2}\right|$ et $i(x)=\frac{x}{2}$. (Ne pas refaire tous les calculs).

3°) Soit la fonction f définie par $\forall(x,y)\in\mathbb{R}_+^2\ \ f(x,y)=xy(2x+y-6)$.

a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.

b) Soit la matrice $M=\begin{pmatrix}8 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$. Calculer son polynôme caractéristique et montrer que ses deux valeurs propres sont positives (il n'est pas indispensable de les calculer effectivement).

c) En déduire l'existence d'un minimum ou d'un maximum de f sur le quart de plan ouvert $\{x>0, y>0\}$.

II. Seconde partie (4 + 6 + 3 points)

1°) Développement en série entière de Arcsin x et approximation de π :

a) Soit la fonction g définie sur $]-1, +1]$ par : $g(x) = (1+x)^{\alpha}$ pour $\alpha \in R$. Calculer ses dérivées successives $g^{(n)}(x)$ et en déduire $g^{(n)}(0)$ pour $n \in N$.

b) En déduire le développement en série entière de la fonction g.

c) A l'aide des opérations usuelles (dérivation, intégration, changement de variable, ...) en déduire le développement en série entière de $f(x) = \text{Arcsin } x$.

d) Soit la série entière $S(x) = \sum_{n=0\infty}^{\infty} u_n x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+1)2^{2n}(n!)^2} x^{2n+1}$. Déterminer un équivalent de u_n en $+\infty$, le rayon de convergence de la série entière. S est-elle convergente en 1 ?

e) Montrer que $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ et $S(1) = \frac{\pi}{2}$. En déduire l'écriture de π sous forme de somme de série.

f) Quel calcul $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ ou $S(1) = \frac{\pi}{2}$ serait le plus efficace pour calculer une approximation de π ?

Ne pas passer beaucoup de temps sur cette question f), donner simplement une justification en une ligne.

2°) Soit l'équation différentielle (E) $x y'' + 2 y' + x y = 0$ et les intervalles $I_1 =]\,0\,, +\infty[$ et $I_2 =]-\infty\,, 0\,[$.

a) Déterminer une fonction développable en série entière au voisinage de 0 solution de l'équation (E). En calculer une forme explicite.

b) Montrer que la fonction $g : x \to g(x) = \frac{\cos x}{x}$ est solution de (E) sur les intervalles I_1 et I_2.

c) En déduire la solution générale se (E) sur chacun des intervalles I_1 et I_2, puis la solution f vérifiant $\lim_{x \to 0} f = 1$ et $\lim_{x \to 0} f' = 0$.

3°) Soit la forme différentielle ω définie sur R^3 par : $\omega = P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$ avec $P = 4xy + y^2 - 6yz^2$ $\quad Q = 2x^2 + 2xy - 6xz^2$ et $R = -12xyz + 2z$.

a) Calculer les expressions : $\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$.

b) En déduire l'existence et le calcul d'une fonction $F : R^3 \to R^3$ telle que $dF = \omega$ et $F(0, 0, +1) = 0$.

Quelques résultats pouvant être utilisés dans les calculs :

Formule de Stirling : $n! \underset{n \to \infty}{\approx} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, $(\text{Arc}\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\text{Arc}\sin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

aujourd'hui = mardi 16 janvier 2007 $\qquad$ 1 € = \$ 1,287 $\quad$ Arcsin 0 = 0

N'oubliez pas de faire quelques étirements après cette (dure) épreuve !

La valeur de performance d'une idée tient à la modification de comportement qu'elle apporte à l'individu ou au groupe qui l'adopte.