université de technologie
Belfort-Montbéliard

Date : Jeudi 29 Avril 2004

U.V : MQ 22

Semestre : AUTOMNE ◯ PRINTEMPS ●

Examen : Médian ● Final ◯

NOM : ________ Prénom : ________ Né(e) le : ________

DEPARTEMENT :

NIVEAU : ________ FILIERE : ________

Le sujet se compose de 3 exercices totalement indépendants.

Signature :

Durée de l'épreuve : 2 heures
Polycopié de cours
Calculatrice autorisée

N'omettez pas
de signer votre copie

Exercice n° 1

Soit un repère orthonormé direct $[O; (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})]$.

On considère dans ce repère, où les longueurs sont exprimées en m et les efforts en kN, les deux torseurs $\{\tau_1\}$ et $\{\tau_2\}$ dont les éléments de réduction sont définis en O :

$$\{\tau_1\} = {}_O\{\, 6\vec{z}\,; 6\vec{x}\,\} \quad \text{et} \quad \{\tau_2\} = {}_O\{\, -6\vec{x} - 6\vec{y}\,; 4\vec{z}\,\}$$

**1- Etude du torseur $\{\tau_1\}$**

11 - Calculer l'invariant scalaire $I_1$ du torseur $\{\tau_1\}$

$I_1 =$

0,5

12 - Quel est le type du torseur $\{\tau_1\}$

0,5

13- Déterminer l'axe central $(\Delta_1)$

- Déterminer le vecteur $\overrightarrow{OH}_1$ où $H_1$ est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur l'axe central $(\Delta_1)$ du torseur $\{\tau_1\}$

$\overrightarrow{OH}_1 =$

1,5

- Déterminer les équations de deux plans $(P_1)$ et $(P_2)$ dont l'intersection est l'axe central $(\Delta_1)$

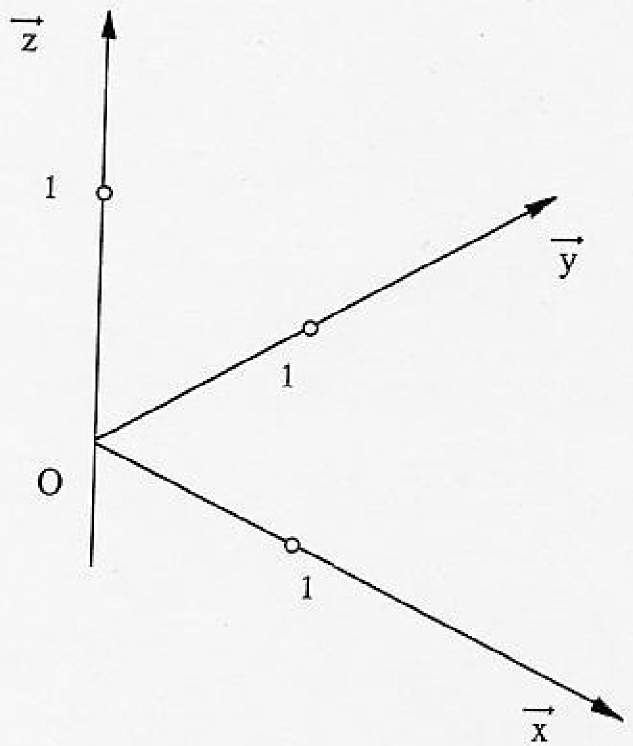
*Réponse page suivante*

| | | |
|---|---|---|
| Equation du plan $(P_1)$ | | 1 |
| Equation du plan $(P_2)$ | | 1 |

- Représenter sur la figure ci-dessous :

  * les deux plans $(P_1)$ et $(P_2)$, le vecteur $\overrightarrow{OH}_1$ et l'axe central $(\Delta_1)$

  * la somme géométrique $\vec{s}\{\tau_1\}$ , le moment résultant $\vec{M}_O\{\tau_1\}$ au point O et le moment résultant en un point de l'axe central




0,5

0,5

0,5

0,5

0,5

0,5

*Echelles :*
*1 pour les longueurs*
*6 pour les éléments de réduction*

## 2- Etude du torseur $\{\tau\}$

Soit le torseur $\{\tau\}$ tel que : $\{\tau\} + \{\tau_1\} + \{\tau_2\} = \{0\}$

21 - Calculer les éléments de réduction en O du torseur $\{\tau\}$

| | |
|---|---|
| $\vec{s}\{\tau\} =$ | 1,5 |
| $\vec{M}_O\{\tau\} =$ | 1,5 |

22 - Calculer l'invariant scalaire I de $\{\tau\}$. En déduire le type du torseur.

| | | |
|---|---|---|
| | $I =$ | 0,5 |
| Type du torseur | | 0,5 |

23- Déterminer l'axe central $(\Delta)$

- Déterminer le vecteur $\overrightarrow{OH}$ où H est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur l'axe central $(\Delta)$ du torseur $\{\tau\}$

| | |
|---|---|
| $\overrightarrow{OH} =$ | 1,5 |

- Calculer la valeur du moment résultant en un point de l'axe central ($\Delta$).

$\vec{M}_{-}\{\tau\} =$ 1,5

- En déduire le pas réduit h de ce torseur

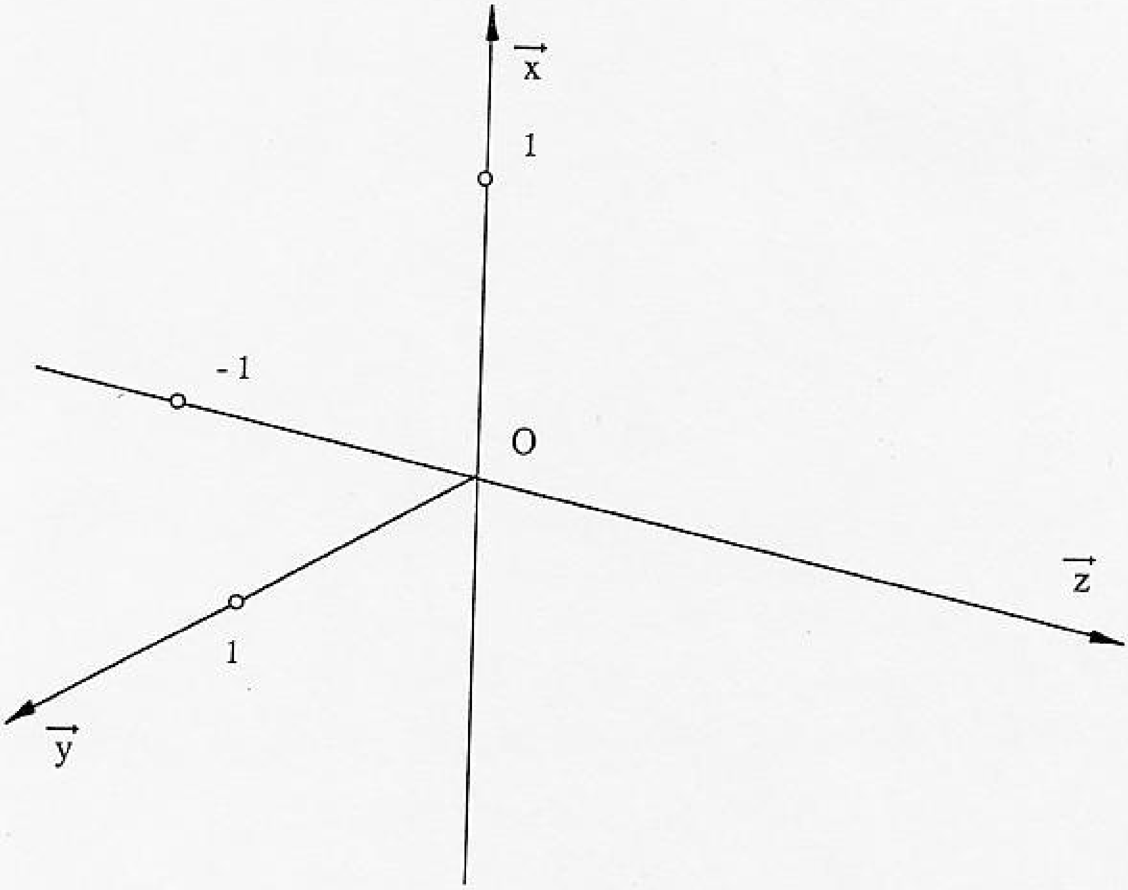
$h =$ 0,5

- Calculer les coordonnées ($x_A$, $y_A$) du point A intersection de l'axe central ($\Delta$) avec le plan d'équation ($z = 0$).

$x_A =$ $y_A =$ 1,5 1,5

- Représenter sur la figure ci-dessous :

* le point A,
* l'axe central $(\Delta)$,
* la somme géométrique $\overrightarrow{s}\{\tau\}$,
* le moment résultant en $\overrightarrow{M}_H\{\tau\}$.




0,5

0,5

0,5

0,5

*Echelles :*
*1 pour les longueurs*
*3 pour les éléments de réduction*

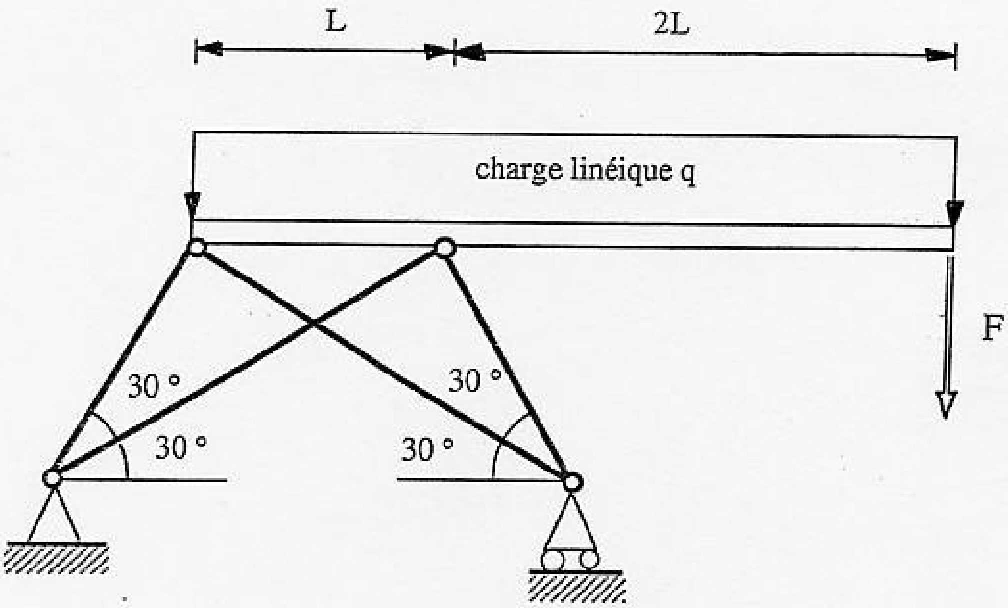
Exercice n°2

On considère le treillis plan représenté ci-dessous. Il est soumis à une charge verticale uniformément répartie q et à une charge concentrée F selon la figure.

**Hypothèses et notations :**

- les articulations sont sans frottement
- le poids propre des éléments est négligeable devant le chargement appliqué
- on note $N_i$ les efforts normaux dans les barres avec :

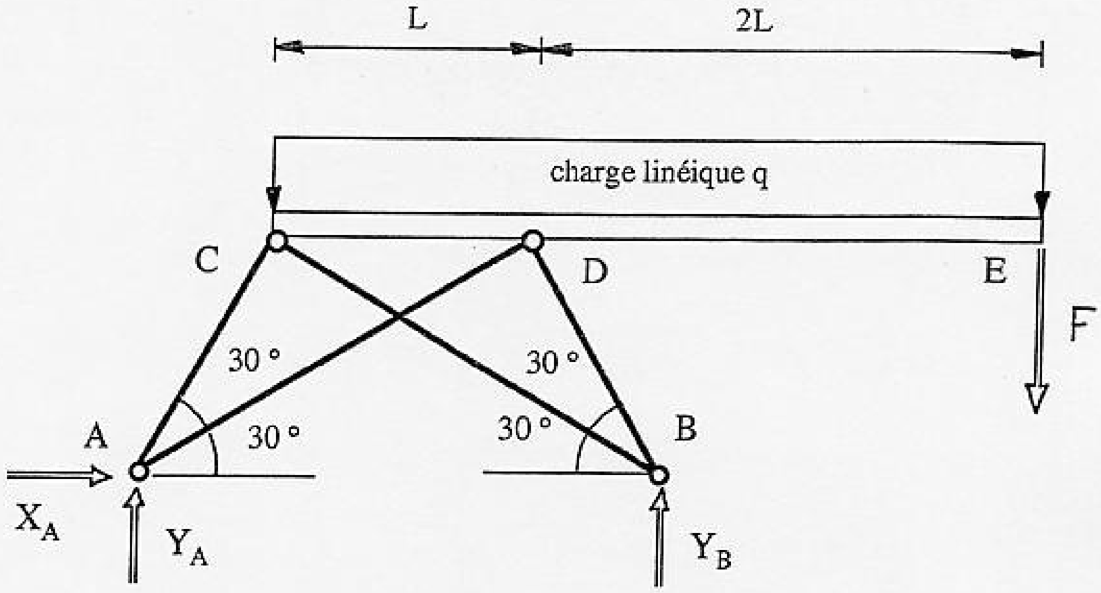
$N_i > 0$ (traction) et $N_i < 0$ (compression)



1- Calculer les actions de liaison avec le sol en A et en B

On notera :

$\{Sol \rightarrow Trellis\} = {}_A\{X_A \vec{x} + Y_A \vec{y};\ \vec{0}\}$ et $\{Sol \rightarrow Treillis\} = {}_B\{Y_B \vec{y};\ \vec{0}\}$

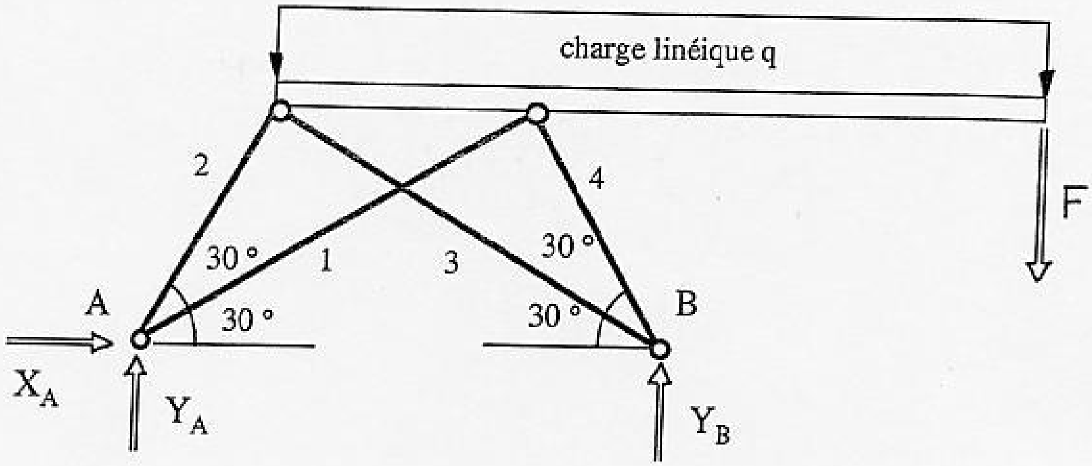



Ecrire les trois équations d'équilibre du treillis.
On écrira l'équation de moment au **point A**

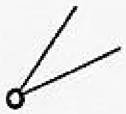
| | |
|---|---|
| = 0 | 1,5 |
| = 0 | 1,5 |
| = 0 | 1,5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X_A =$ | $Y_A =$ | $Y_B =$ | 1,5 |

2- Calculer les actions dans les barres




Equations d'équilibre du noeud (A)



A

| | | |
|---|---|---|
| | | 0,5 |
| $= 0$ | | 1 |
| $= 0$ | | 1 |

Equations d'équilibre du noeud (B)

B

| | | |
|---|---|---|
| | | 0,5 |
| $= 0$ | | 1 |
| $= 0$ | | 1 |

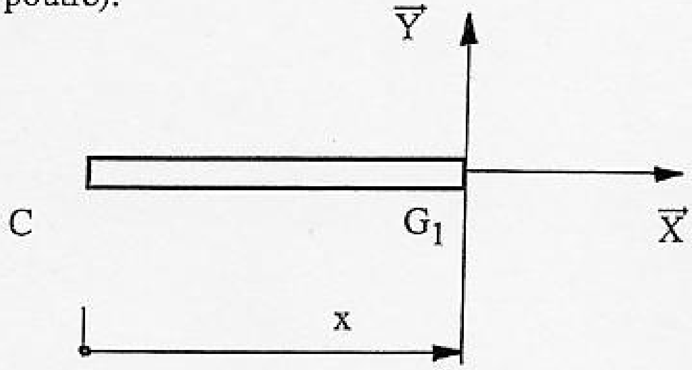
Calculer les efforts $N_i$ et indiquer si la barre est en traction ou compression

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $N_1 =$ | T<br>C | $N_2 =$ | T<br>C | 1,5 | 1,5 |
| $N_3 =$ | T<br>C | $N_4 =$ | T<br>C | 1,5 | 1,5 |

3- Torseur des forces de cohésion dans la poutre droite (CDE)

On effectue deux séries de coupures : ($C_1$) entre C et D et ($C_2$) entre D et E. Calculer l'effort normal $N_i$, l'effort tranchant $T_i$ et le moment fléchissant $M_i$ en $G_i$(centre de la section droite de la poutre).

- En $G_1$ tel que $\overrightarrow{CG}_1 = x\,\overrightarrow{X}$ avec $(0 \leq x \leq L)$




| | |
|---|---|
| = 0 | 1,5 |
| = 0 | 1,5 |
| = 0 | 1,5 |

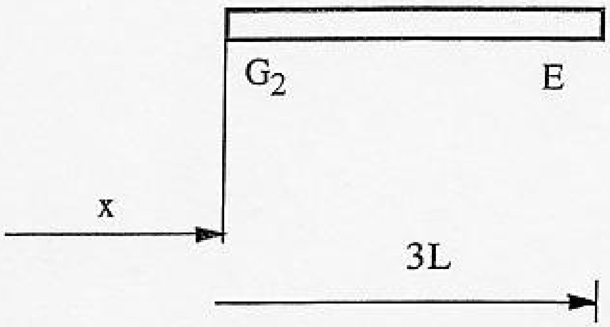
1,5

$N_1 =$ 1,5

$T_1 =$

$M_1 =$ 1,5

- En $G_2$ tel que $\overrightarrow{CG}_2 = x\,\overrightarrow{X}$
avec $(L \leq x \leq 3L)$



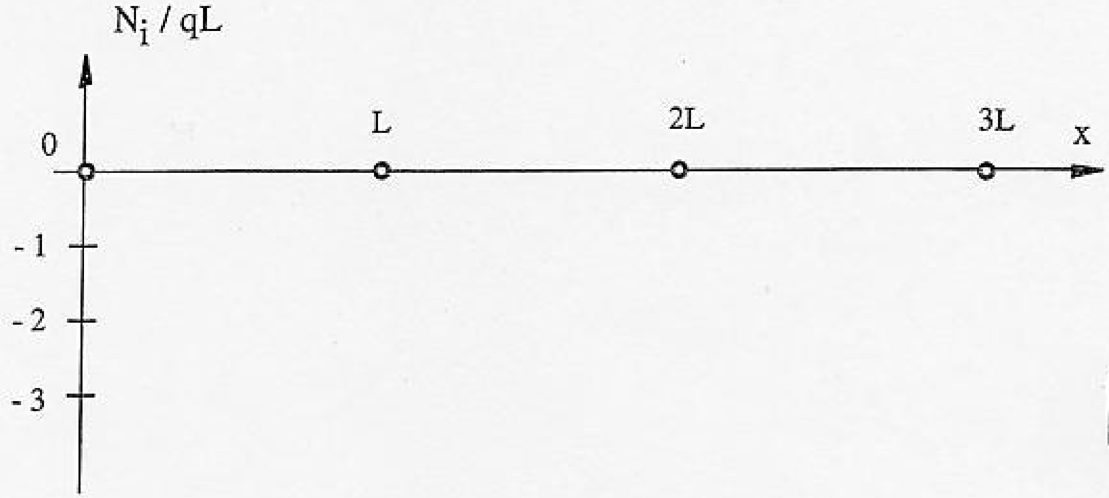

| | |
|---|---|
| $= 0$ | 1,5 |
| $= 0$ | 1,5 |
| $= 0$ | 1,5 |

$N_2 =$ 1,5 1,5

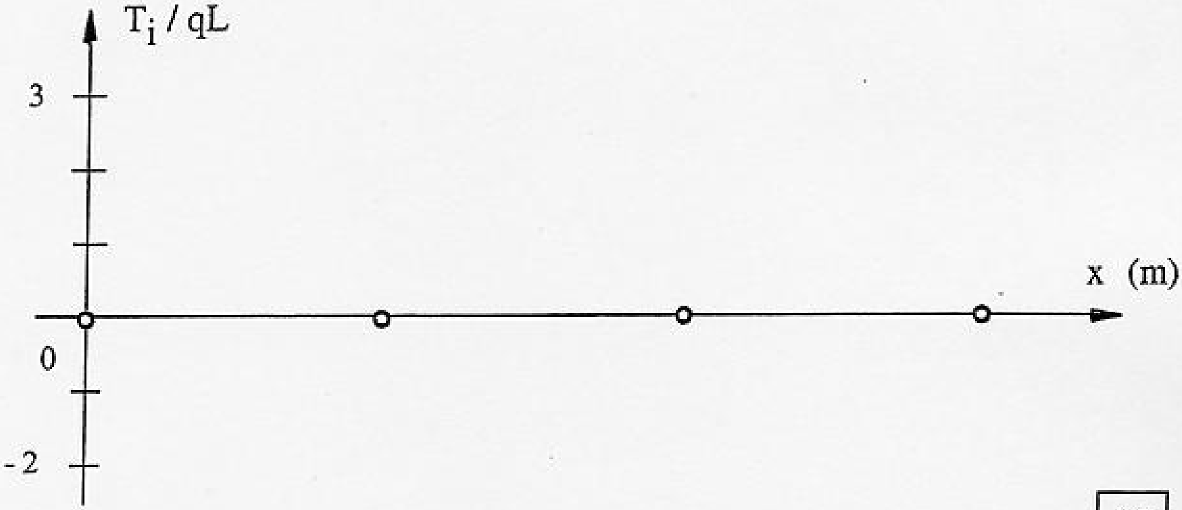
$T_2 =$

$M_2 =$ 1,5

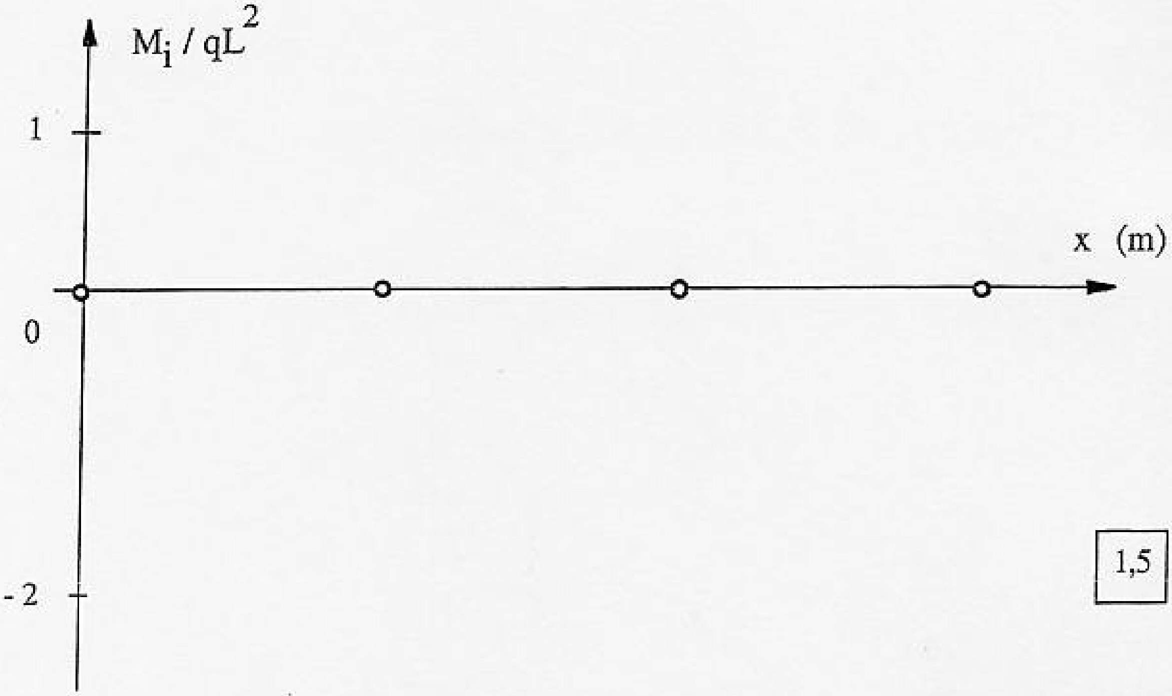
Tracer les diagrammes de l'effort normal $N_i$, de l'effort tranchant $T_i$ et du moment fléchissant $M_i$ **dans le cas particulier où F = 0.**




1,5



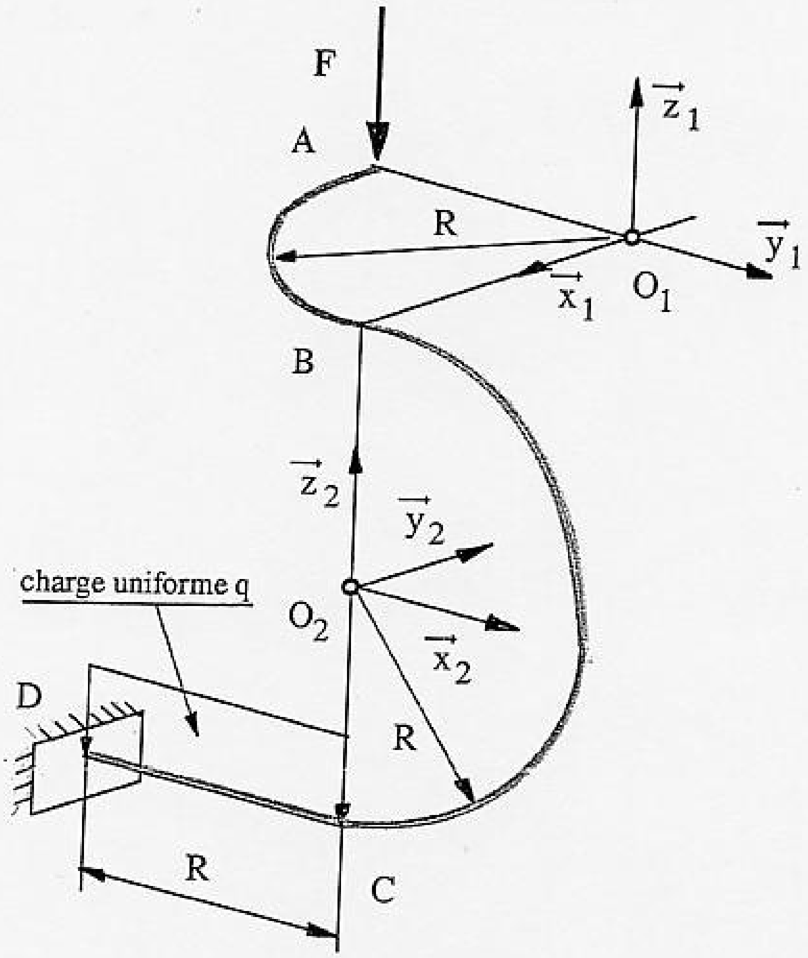

1,5




1,5

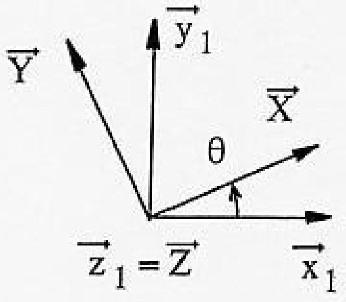
## Exercice n° 3

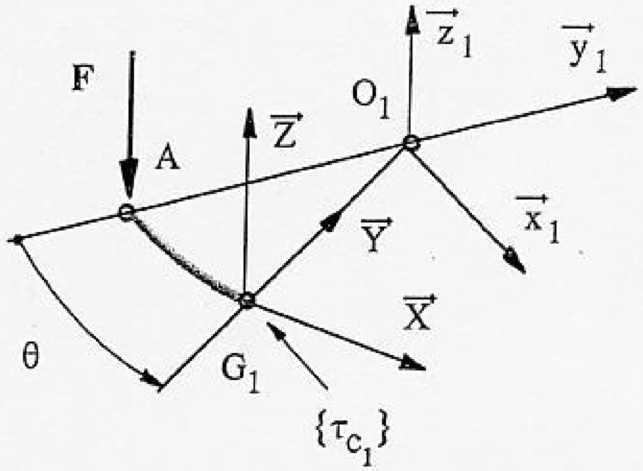
On considère la poutre (ABCD) représentée ci-dessous.
Le tronçon (AB) est un quart de cercle de rayon R de centre $O_1$. Le tronçon (BC) est un demi cercle de rayon R et de centre $O_2$. Le tronçon (CD) est rectiligne de longueur $\cancel{2}R$.
Elle est parfaitement encatrée en D avec le bâti.
Elle supporte un charge F appliquée en A et un charge uniformément répartie q sur la partie rectiligne (CD).



1- Déterminer les éléments de réduction du torseur des forces de cohésion dans une section droite de centre G.

11- Tronçon AB ($0 \leq \theta \leq \pi/2$)
On isole pour celà le tronçon $AG_1$.




| | | |
|---|---|---|
| $N_1=$ | $T_{Y1}=$ | $T_{Z1}=$ |
| $M_{t1}=$ | $M_{Y1}=$ | $M_{Z1}=$ |

1

1

1

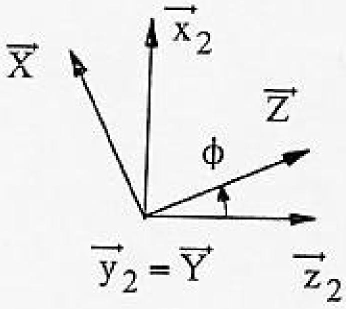
2

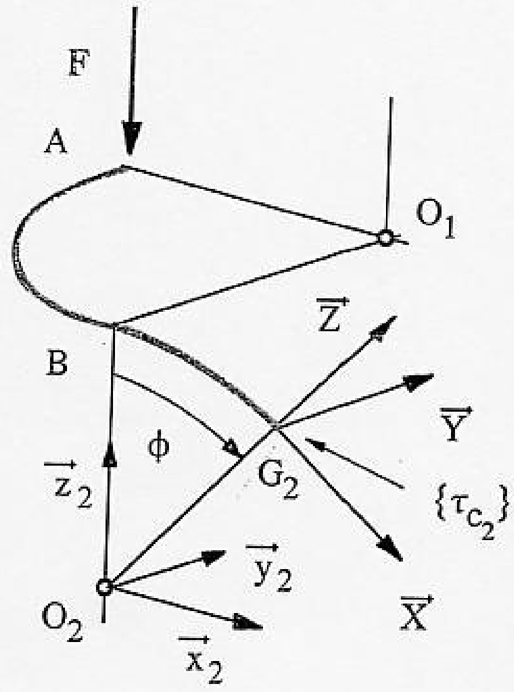
2

2

12- Tronçon BC ($0 \leq \phi \leq \pi$)

On isole pour celà le tronçon $AG_2$.




1

1

1

2

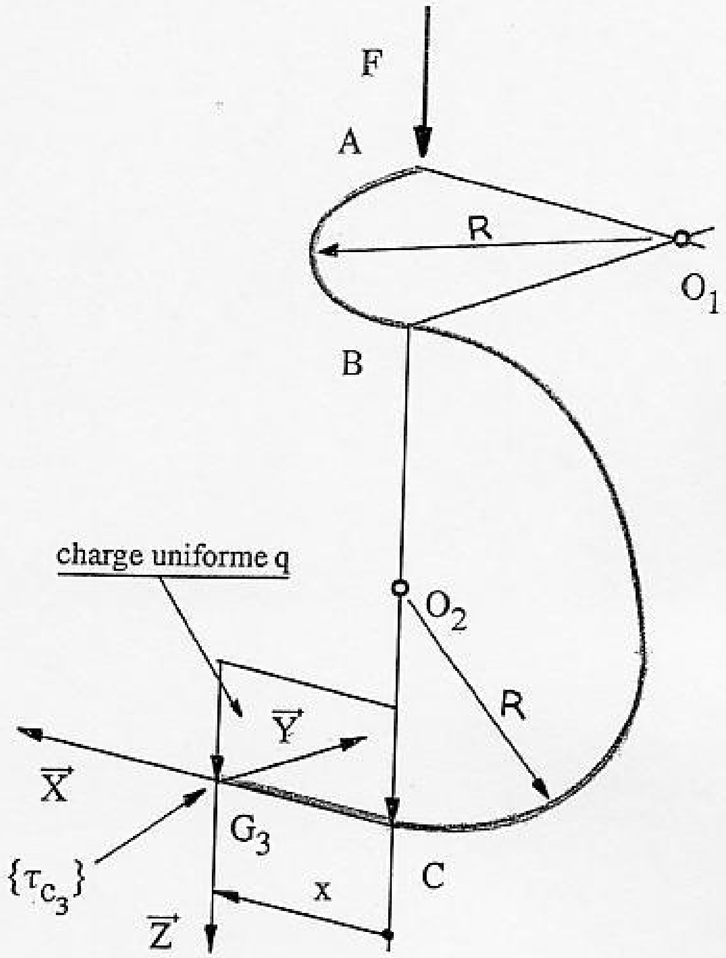
2

2

| | | |
|---|---|---|
| $N_2$= | $T_{Y2}$= | $T_{Z2}$= |
| $M_{t2}$= | $M_{Y2}$= | $M_{Z2}$= |

13- Tronçon CD ($0 \leq x \leq R$)

On isole pour celà le tronçon $AG_3$.




| | | | |
|---|---|---|---|
| $N_3=$ | $T_{Y3}=$ | $T_{Z3}=$ | |
| $M_{t3}=$ | $M_{Y3}=$ | $M_{Z3}=$ | |

1

1

1

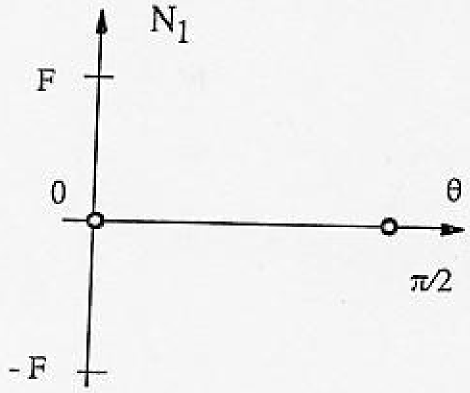
1

1

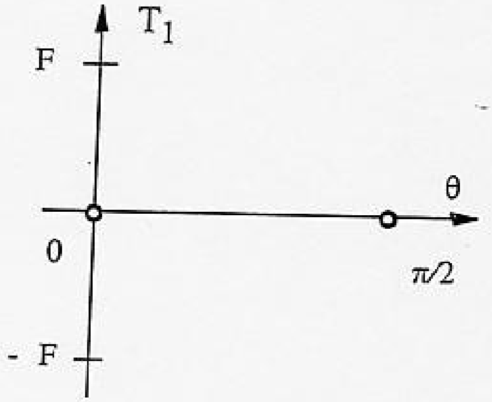
1

2- Tracer les diagrammes de l'effort normal N, du module de l'effort tranchant T, du moment de torsion $M_t$ et du module du moment de flexion $M_f$.

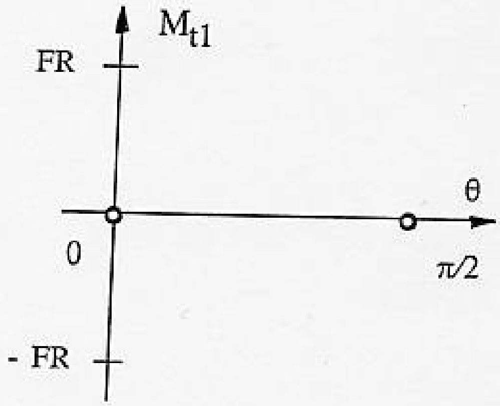
**On prendra pour les tracés : q = F / R**



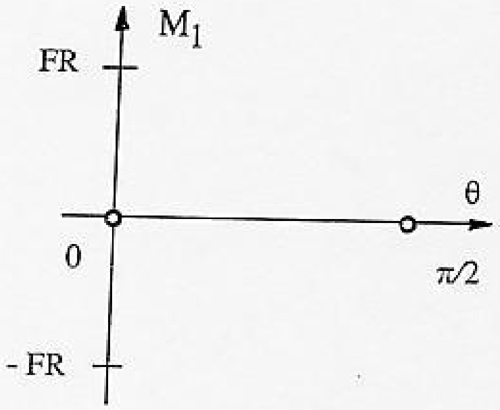

0,5



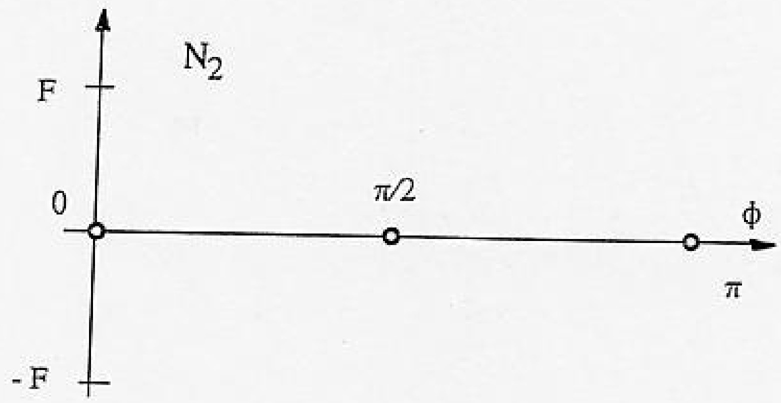

0,5



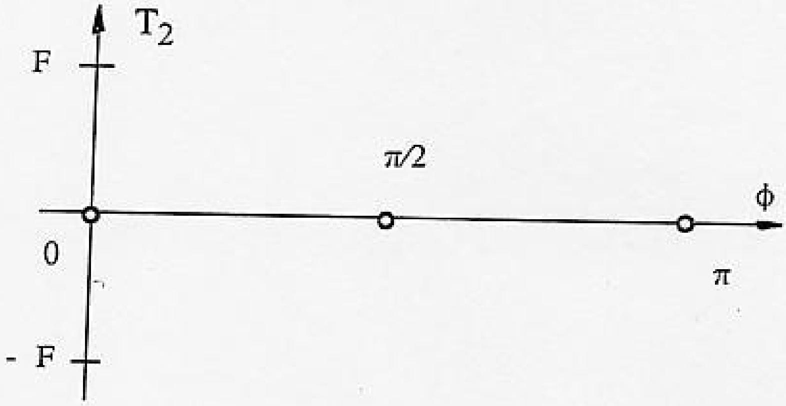

0,5



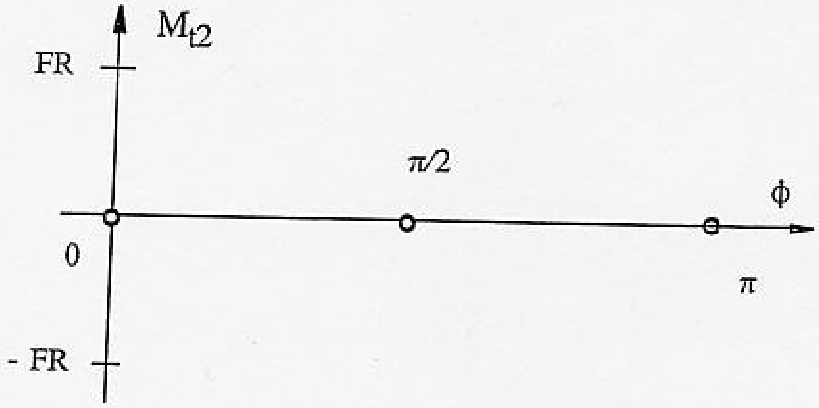

0,5



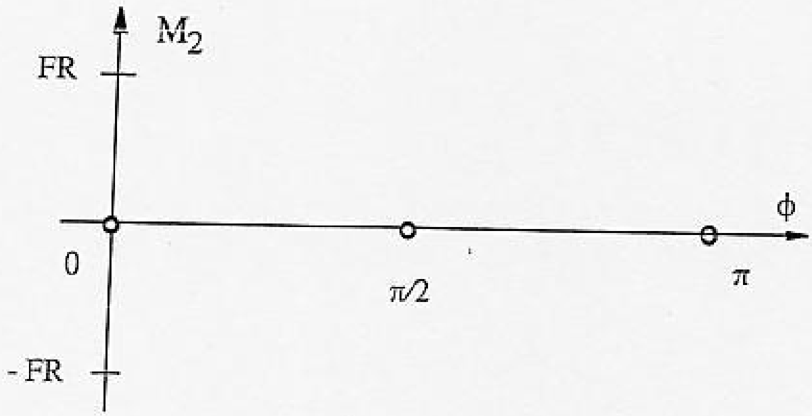

0,5



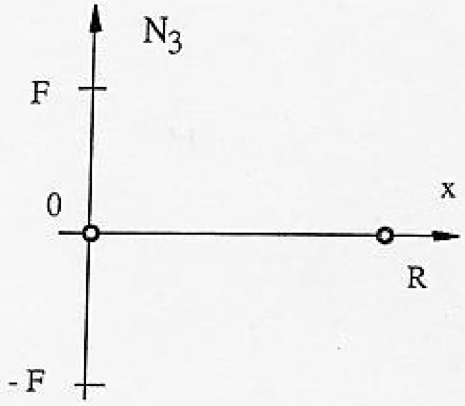

0,5



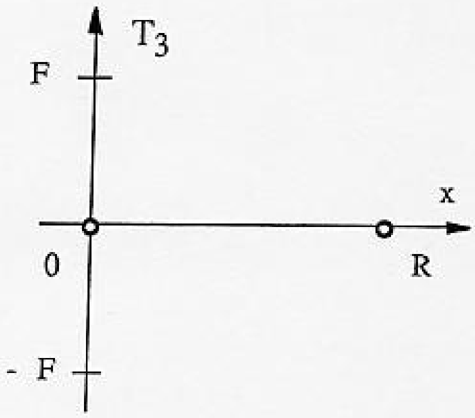

0,5



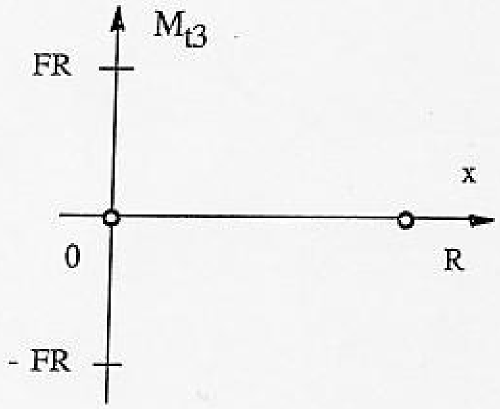

0,5



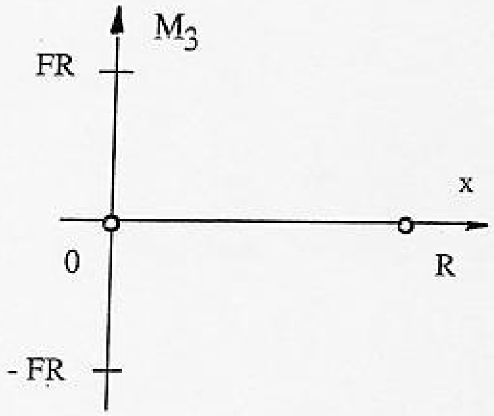

0,5




0,5




0,5




0,5