

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2005

ÉPREUVE DE SPÉCIALITÉ DE MATHÉMATIQUES

Série L

Durée de l'épreuve : 3 heures

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Ce sujet comporte une annexe à rendre.
Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré.*

Exercice 1 (3 points)

Arthur et Wilson sont deux jumeaux qui ont l'habitude de communiquer à l'aide de messages codés. Ils réalisent toujours leur cryptage de la façon suivante :

Chaque lettre de l'alphabet munie de son numéro d'ordre n est remplacée par la lettre de l'alphabet munie du numéro d'ordre p ($1 \leq p \leq 26$) obtenu à l'aide de la formule

$$p \equiv 3 \times n + 7 \pmod{26}.$$

Par exemple la forme cryptée de L est Q car $3 \times 12 + 7 = 43$ et $43 \equiv 17 \pmod{26}$.

1. Reproduire et compléter la table de cryptage donnée sur la feuille annexe à rendre avec la copie (aucune justification n'est demandée).
2. Arthur a envoyé le message suivant à Wilson : MIJUZ CZRI OJ IVROLLHOV.
Retrouver la forme décryptée du message.
3. Wilson désire lui répondre : MERCI.
Donner la forme cryptée de ce message.

Exercice 2 (5 points)

On rappelle que le nombre d'or noté Φ est tel que $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

On appelle rectangle d'or tout rectangle dont le rapport de la longueur sur la largeur est égal au nombre d'or.

Soit $ABCD$ un carré. On considère :

- le milieu I du segment $[DC]$,
- le cercle \mathcal{C} de centre I et de rayon $[IA]$,
- le point d'intersection E de la demi-droite $[DC)$ et du cercle \mathcal{C} ,
- le point F tel que $AFED$ soit un rectangle.

1. Compléter la figure donnée sur la feuille annexe à rendre avec la copie.
2. Exprimer DI en fonction de AD .
3. Montrer que $IA^2 = \frac{5}{4} AD^2$, et en déduire l'expression de IE en fonction de AD .
4. Déduire des deux questions précédentes que $DE = \Phi \cdot AD$, et que le rectangle $AFED$ est un rectangle d'or.

Exercice 3 (6 points)

1. Soit la fonction t définie sur \mathbf{R} par $t(x) = 4x^2 - 5x + 1$.
Montrer que, pour tout réel x , $t(x) = (4x - 1)(x - 1)$.
En déduire le signe de $t(x)$.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x(2x - 5) + \ln x$.
 - a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et la limite de f en 0 .
 - b) Déterminer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{t(x)}{x}$.
 - c) En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - d) Sur une feuille de papier millimétré, tracer la courbe \mathcal{C} représentant la fonction f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

Exercice 4 (6 points)

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats arrondis à 10^{-4} .

Les résultats d'une enquête concernant les véhicules circulant en France montrent que :

- 88 % des véhicules contrôlés ont des freins en bon état ;
- parmi les véhicules contrôlés ayant des freins en bon état, 92 % ont un éclairage en bon état ;
- parmi les véhicules contrôlés ayant des freins défectueux, 80 % ont un éclairage en bon état.

On choisit au hasard un des véhicules concernés par l'enquête. Il y a équiprobabilité des choix.

On note F l'événement "le véhicule contrôlé a des freins en bon état".

On note E l'événement "le véhicule contrôlé a un éclairage en bon état".

\overline{E} et \overline{F} désignent les événements contraires de E et de F .

1. Décrire cette situation à l'aide d'un arbre.
2.
 - a) Déterminer la probabilité $P(\overline{F})$ de l'événement \overline{F} .
 - b) Quelle est la probabilité $P_{\overline{F}}(\overline{E})$, probabilité que l'éclairage ne soit pas en bon état, sachant que les freins ne sont pas en bon état.
 - c) Montrer que la probabilité $P(E \cap F)$ de l'événement $E \cap F$ est égale à 0,8096.
 - d) Quelle est la probabilité pour que le véhicule ait un éclairage en bon état ?
3. Tout conducteur d'un véhicule concerné par l'enquête ayant des freins ou un éclairage défectueux, doit faire réparer son véhicule. Calculer la probabilité pour qu'un conducteur ait des réparations à effectuer sur ses freins ou son éclairage.

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

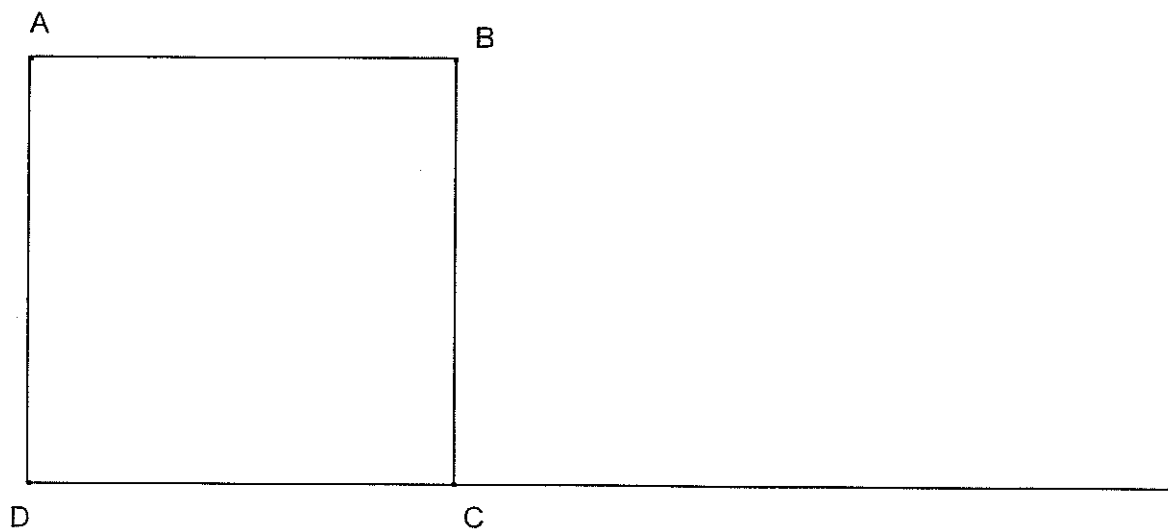
Exercice 1

Table de cryptage à compléter :

lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
p	10											17													1	
forme cryptée	J											Q													A	

Exercice 2

Figure à compléter :



CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION DE 2005

ÉPREUVE DE SPÉCIALITÉ DE MATHÉMATIQUES

Série L

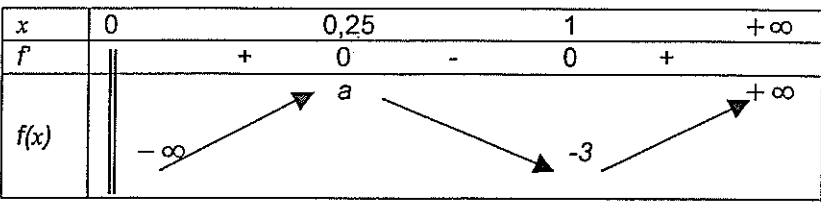
Durée de l'épreuve : 3 heures

CONSIGNES DE CORRECTION

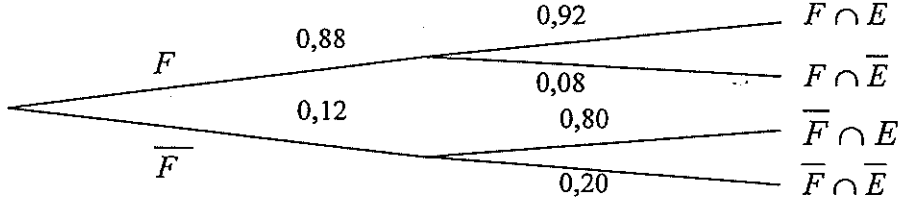
EXERCICE 1 (3 points)																																																										
1.	<table border="1"> <tr><td>lettre</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td><td>G</td><td>H</td><td>I</td><td>J</td><td>K</td><td>L</td><td>M</td></tr> <tr><td>n</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td></tr> <tr><td>p</td><td>10</td><td>13</td><td>16</td><td>19</td><td>22</td><td>25</td><td>2</td><td>5</td><td>8</td><td>11</td><td>14</td><td>17</td><td>20</td></tr> <tr><td>f. cryptée</td><td>J</td><td>M</td><td>P</td><td>S</td><td>V</td><td>Y</td><td>B</td><td>E</td><td>H</td><td>K</td><td>N</td><td>Q</td><td>T</td></tr> </table>	lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	p	10	13	16	19	22	25	2	5	8	11	14	17	20	f. cryptée	J	M	P	S	V	Y	B	E	H	K	N	Q	T	2
	lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M																																												
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13																																													
p	10	13	16	19	22	25	2	5	8	11	14	17	20																																													
f. cryptée	J	M	P	S	V	Y	B	E	H	K	N	Q	T																																													
<table border="1"> <tr><td>lettre</td><td>N</td><td>O</td><td>P</td><td>Q</td><td>R</td><td>S</td><td>T</td><td>U</td><td>V</td><td>W</td><td>X</td><td>Y</td><td>Z</td></tr> <tr><td>n</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td></tr> <tr><td>p</td><td>23</td><td>26</td><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>12</td><td>15</td><td>18</td><td>21</td><td>24</td><td>1</td><td>4</td><td>7</td></tr> <tr><td>f. cryptée</td><td>W</td><td>Z</td><td>C</td><td>F</td><td>I</td><td>L</td><td>O</td><td>R</td><td>U</td><td>X</td><td>A</td><td>D</td><td>G</td></tr> </table>	lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	p	23	26	3	6	9	12	15	18	21	24	1	4	7	f. cryptée	W	Z	C	F	I	L	O	R	U	X	A	D	G		
lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z																																													
n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26																																													
p	23	26	3	6	9	12	15	18	21	24	1	4	7																																													
f. cryptée	W	Z	C	F	I	L	O	R	U	X	A	D	G																																													
2.	BRAVO POUR TA REUSSITE	0,5																																																								
3.	TVIPH	0,5																																																								

EXERCICE 2 (5 points)		
1.	I, \mathcal{C} , E, F	1,5
2.	$DI = \frac{1}{2} AD$	1
3.	Théorème de Pythagore, puis : $IA^2 = AD^2 + DI^2 = AD^2 + \frac{1}{4} AD^2 = \frac{5}{4} AD^2$ $IE = IA = \frac{\sqrt{5}}{2} AD$	1,5
4.	$DE = DE + IE = \frac{1}{2} AD + \frac{\sqrt{5}}{2} AD = \Phi \cdot AD$ d'où AFED rectangle d'or.	1

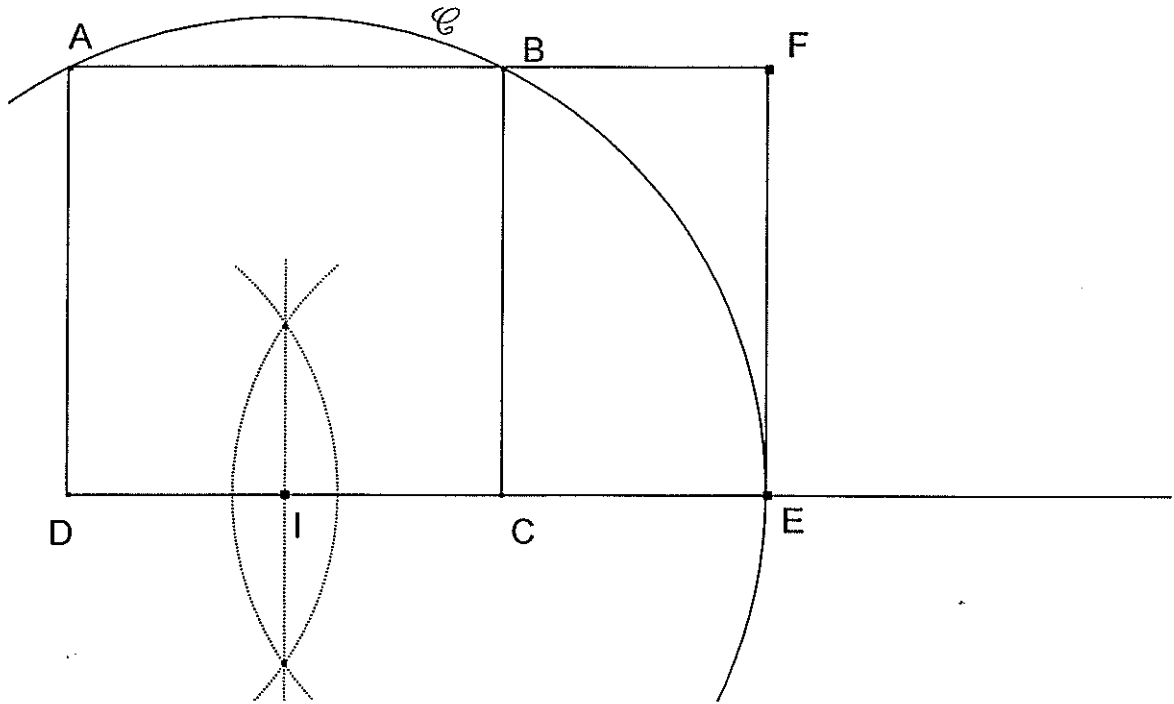
EXERCICE 3 (6 points)

1.	$(4x - 1)(x - 1) = 4x^2 - 5x + 1 = t(x)$; $t(x) \leq 0$ sur $[0,25;1]$ et $t(x) \geq 0$ ailleurs	1												
2. a)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$	1												
2. b)	$f'(x) = 4x - 5 + \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 5x + 1}{x} = \frac{t(x)}{x}$	1												
2. c)	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>0,25</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>f'</td> <td></td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> </table>  <div style="display: inline-block; vertical-align: middle; margin-left: 20px;"> $a = -\frac{9}{8} - \ln 4$ $a \approx -2.5$ </div>	x	0	0,25	1	$+\infty$	f'		+	0	-	0	+	2
x	0	0,25	1	$+\infty$										
f'		+	0	-	0	+								
2. d)	Tracé de \mathcal{C}	1												

EXERCICE 4 (6 points)

1.		2
2. a)	$P(\overline{F}) = 0,12$	0,5
2. b)	$P_{\overline{F}}(\overline{E}) = 0,20$	0,5
2. c)	$P(E \cap F) = P_F(E) \cdot P(F) = 0,92 \times 0,88 = 0,8096$	1
2. d)	$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \overline{F}) = 0,8096 + 0,80 \times 0,12 = 0,9056$	1
3.	$1 - P(E \cap F) = 0,1904$	1

Exercice 2



Exercice 3

