

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2002

MATHÉMATIQUES

Série : ES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 heures. — COEFFICIENT : 7

*Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.*

*Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.*

*L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.*

*Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.  
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements  
entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.*

**Tournez la page S.V.P.**

### Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les résultats numériques seront obtenus à l'aide de la calculatrice ; aucun détail des calculs statistiques n'est demandé.

Le tableau suivant donne la dépense, en millions d'euros, des ménages en produits informatiques (matériels, logiciels, réparations) de 1990 à 1998.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année $x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Dépense $y_i$	398	451	423	501	673	956	1077	1255	1427

Source INSEE

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique  $(x_i, y_i)$  et le point moyen dans un repère orthogonal tel que 2 cm représentent une année en abscisse et 1 cm représente 100 millions d'euros en ordonnée (ainsi 398 sera représenté par 3,98 cm).

2. a. Donner la valeur arrondie à  $10^{-3}$  du coefficient de corrélation linéaire de la série  $(x_i, y_i)$ .  
Un ajustement affine vous paraît-il justifié ?

b. Écrire une équation de la droite d'ajustement affine D de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à  $10^{-3}$ ). Représenter D dans le repère précédent.

c. En utilisant cet ajustement affine, donner une estimation de la dépense des ménages (arrondie à un million d'euros) en produits informatiques en 2000.

3. L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel. On pose  $z_i = \ln y_i$ .

a. Recopier et compléter le tableau suivant où  $z_i$  est arrondi à  $10^{-3}$  :

$x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i$	5,986	6,111	6,047	6,217					

b. Donner la valeur arrondie à  $10^{-3}$  du coefficient de corrélation linéaire de la série  $(x_i, z_i)$ . Écrire une équation de la droite d'ajustement affine de  $z$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à  $10^{-3}$ ).

c. En utilisant cet ajustement, donner une estimation de la dépense des ménages (arrondie à un million d'euros) en produits informatiques en 2000.

4. En 2000 les ménages ont dépensé 68,9 milliards d'euros pour la culture, les loisirs et les sports et 3,1% de ces dépenses concernent les produits informatiques.

Avec lequel des deux ajustements l'estimation faite est-elle la meilleure ?

## Exercice 2 (5 points)

### Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Julie possède depuis plusieurs mois un téléphone mobile pour lequel elle a souscrit un forfait mensuel de deux heures. Soucieuse de bien gérer ses dépenses, elle étudie l'évolution de ses consommations.

Elle a constaté que :

- Si pendant le mois noté  $n$  elle a dépassé son forfait, la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant noté  $(n + 1)$  est  $\frac{1}{5}$ .
- Si pendant le mois noté  $n$  elle n'a pas dépassé son forfait, la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant est  $\frac{2}{5}$ .

Pour  $n$  entier naturel strictement positif, on désigne par  $A_n$  l'événement « Julie a dépassé son forfait le mois  $n$  » et par  $B_n$  l'événement contraire. On pose  $p_n = p(A_n)$  et  $q_n = p(B_n)$  ; on a  $p_1 = \frac{1}{2}$ .

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

- a. Donner les probabilités de  $A_{n+1}$  sachant que  $A_n$  est réalisé et de  $A_{n+1}$  sachant que  $B_n$  est réalisé.  
b. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, les égalités suivantes sont vraies :

$$p(A_{n+1} \cap A_n) = \frac{1}{5} p_n \quad \text{et} \quad p(A_{n+1} \cap B_n) = \frac{2}{5} q_n.$$

$$\text{En déduire que l'égalité suivante est vraie : } p_{n+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} p_n.$$

2. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$  on pose :  $u_n = p_n - \frac{1}{3}$ .

Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme  $u_1$ .

3. Écrire  $u_n$  puis  $p_n$  en fonction de  $n$ . Déterminer la limite de  $(p_n)$ .

### Problème (10 points)

Commun à tous les candidats

#### PARTIE A

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = (x^2 - 3x + 3)e^x - 4$ .

1. a. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
b. Étudier les variations de  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$ .
2. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $x_0$  appartenant à  $]1 ; 2[$ .  
Donner une valeur arrondie à  $10^{-3}$  de  $x_0$ .
3. Dédurre des résultats précédents le signe de  $f(x)$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

#### PARTIE B

Une entreprise fabrique un produit, en quantité  $x$  exprimée en tonnes, sa capacité de production ne pouvant dépasser 3 tonnes. Le coût total de fabrication de ce produit, en centaines de milliers d'euros, est donné par :

$$C_T(x) = (x - 3)e^x + 3x + 4.$$

Le coût moyen est défini sur  $]0 ; 3]$  par la formule suivante :  $C_m(x) = \frac{C_T(x)}{x}$ .

1. Pour tout  $x$  de  $]0 ; 3]$  calculer  $C'_m(x)$  et vérifier que l'égalité suivante est vraie :  $C'_m(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ .  
En déduire le sens de variation de  $C_m$  sur  $]0 ; 3]$ .
2. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimum ?  
Quel est le coût moyen minimum (arrondi au millier d'euros) d'une tonne de ce produit ?

#### PARTIE C

Une tonne du produit fabriqué est vendue 300 000 euros ; toute la production est vendue.

1. a. Le bénéfice algébrique, en centaines de milliers d'euros, réalisé après la fabrication et la vente de  $x$  tonnes du produit est noté  $B(x)$ . Montrer l'égalité suivante :  $B(x) = (3 - x)e^x - 4$ .  
b. Étudier le sens de variation de  $B$  sur  $[0 ; 3]$ .  
Quelle est la production pour laquelle le bénéfice est maximum ?
2. a. Tracer la courbe représentative de  $B$  dans un plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 5 cm pour une tonne en abscisse et 2 cm pour 100 000 euros en ordonnée).  
b. À l'aide du graphique, déterminer à 0,1 près les quantités à produire pour que l'entreprise réalise un gain.

**BACCALAURÉAT, SÉRIE ES**  
**ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE ET ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ**  
**FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES**

**I. STATISTIQUE**

*Moyenne, variance, écart type*

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ; \quad V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i x_i ; \quad V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

*Droites de régression*

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i) - \bar{x} \bar{y}$$

$$y = ax + b, \text{ où } a = \frac{\sigma_{xy}}{V(x)}$$

$$x = a'y + b', \text{ où } a' = \frac{\sigma_{xy}}{V(y)}$$

*Coefficient de corrélation linéaire*

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

**II. COMBINATOIRE - DENOMBREMENTS**  
**(SPÉCIALITÉ)**

*Soit E un ensemble de n éléments*

Nombre de sous-ensembles de p éléments de E :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \cdots (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

où  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$  ;  $0! = 1$

$$C_n^p = C_n^{n-p} ; \quad C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$$

**III. PROBABILITÉS**

Si A et B sont incompatibles :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) ; \quad P(\Omega) = 1 ; \quad P(\emptyset) = 0$$

Si  $A_1, \dots, A_n$  forment une partition de A,  $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

Dans le cas équiprobable :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de A}}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$$

*Probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé*

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) ; \quad P(A|B) \text{ se note aussi } P_B(A)$$

Cas où A et B sont indépendants :  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

*Formule des probabilités totales*

Si les événements  $B_1, B_2, \dots, B_n$  forment une partition de  $\Omega$ , alors  $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$

*Variable aléatoire*

Fonction de répartition :  $F(x) = P(X \leq x)$

Espérance mathématique :  $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$

Variance :  $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (E(X))^2$

Ecart type  $\sigma_x = \sqrt{V(X)}$

*Loi binomiale (SPÉCIALITÉ)*

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} ; \quad E(X) = np$$

**IV. ALGÈBRE**

*A. IDENTITÉS REMARQUABLES*

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + b^n$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

## B. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient  $a, b, c$  des nombres réels,  $a \neq 0$ , et  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

L'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  admet :

- si  $\Delta > 0$ , deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si  $\Delta = 0$ , une solution réelle double

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si  $\Delta < 0$ , aucune solution réelle.

Si  $\Delta \geq 0$ ,  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ .

## C. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

### Suites arithmétiques

Premier terme  $u_0$  ;  $u_{n+1} = u_n + a$  ;  $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

### Suites géométriques

Premier terme  $u_0$  ;  $u_{n+1} = bu_n$  ;  $u_n = u_0 b^n$

$$\text{Si } b \neq 1, \quad S_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$$

$$\text{Si } b = 1, \quad S_n = n + 1$$

## V. ANALYSE

### A. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES

#### 1. Fonctions logarithme et exponentielle

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\text{Si } x \in ]-\infty, +\infty[ \text{ et } y \in ]0, +\infty[,$$

$$y = \exp x \Leftrightarrow e^x \text{ équivaut à } x = \ln y$$

$$e^0 = 1$$

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$$

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$(e^a)^b = e^{ab}$$

$$\ln a^x = x \ln a$$

#### 2. Fonctions puissances

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$$

$$x^0 = 1$$

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$$

$$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$$

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

## B. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS

Comportement à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty$$

Croissances comparées à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

C. **DÉRIVÉES ET PRIMITIVES** (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. **Dérivées et primitives des fonctions usuelles**

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de validité
$k$	$0$	$]-\infty, +\infty[$
$x$	$1$	$]-\infty, +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$nx^{n-1}$	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
$e^x$	$e^x$	$]-\infty, +\infty[$

2. **Opérations sur les dérivées**

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \text{ } u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

D. **CALCUL INTEGRAL**

Formule fondamentale

Si  $F$  est une primitive de  $f$ , alors  $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

Positivité

Si  $a \leq b$  et  $f \geq 0$ , alors  $\int_a^b f(t)dt \geq 0$ .

Intégration d'une inégalité

Si  $a \leq b$  et  $f \leq g$ , alors  $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

Si  $a \leq b$  et  $m \leq f \leq M$ ,

alors  $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$

Valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  :  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$

E. **EQUATIONS DIFFERENTIELLES**

Équations	Solutions sur $I$
$\frac{f'}{f} = k, f > 0$ sur un intervalle $I$	$f(x) = Ce^{kx}, C > 0$

# CORRIGE

**Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.**

**ÉLÉMENTS DE CORRECTION  
 BARÈME PROPOSÉ**

**N.B. :** Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles s'appliquent à son contenu.

Exercice 1 (5 points)

1

1.  $\bar{x} = 4$   $\bar{y} \approx 796$

0,25

2. a. valeur absolue à  $10^{-3}$  du coefficient de corrélation linéaire : 0,964

0,75

b.  $y = 138,183x + 242,933$

0,5

c. Le rang de 2000 est 10, d'où une estimation de 1624,763 c'est-à-dire 1625 millions d'euros.

0,75

3. a.

$x_i$	..	4	5	6	7	8
$z_i$	...	6,512	6,863	6,982	7,135	7,263

0,5

b. valeur absolue à  $10^{-3}$  du coefficient de corrélation linéaire : 0,974  
 existe d'ajustement affine de  $z$  sur  $x$   
 $z = 0,178x + 5,855$

0,75

c. estimation de  $z$  pour le rang 10 : 7,635  
 d'où comme  $y = e^z$ , on obtient une estimation de 2069 millions d'euros.

0,5

4. dépenses concernant les produits informatiques:  
 $68,9 \times 0,031 = 2,1359$ , c'est-à-dire 2135,9 millions d'euros  
 L'estimation est meilleure avec l'ajustement exponentiel.

Exercice 2 (5 points)  
obligatoire

Notons  $F$  "La réponse est celle d'une fille"

1. a.  $B = (B \cap F) \cup (B \cap \bar{F})$

d'où  $P(B) = P(B/F) \times P(F) + P(B/\bar{F}) \times P(\bar{F})$

$P(B) = 0,2 \times 0,6 + 0,15 \times 0,4$

$P(B) = 0,18$

b. De même

$P(A) = P(A/F) \times P(F) + P(A/\bar{F}) \times P(\bar{F})$

$= 0,65 \times 0,6 + 0,55 \times 0,4$

$P(A) = 0,61$

0,75

1

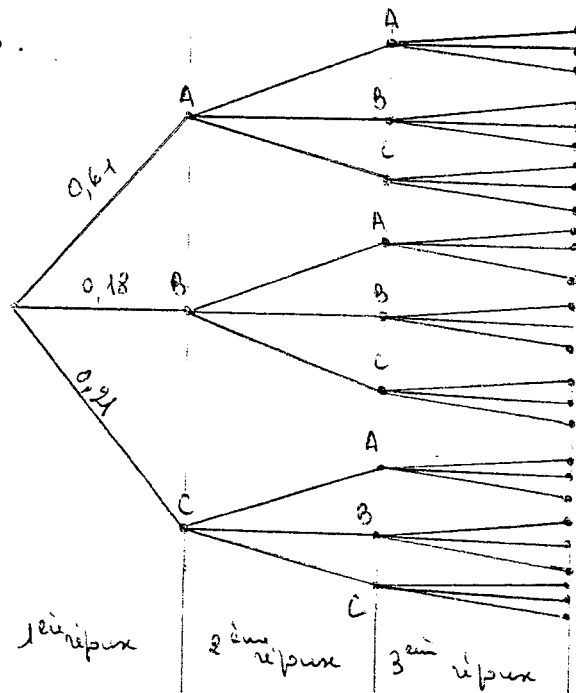
2. Ou cherche  $P(F/B)$

Où a:  $\frac{P(F \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2 \times 0,6}{0,18}$

d'où  $P(F/B) = \frac{2}{3}$

1,25

3.



- A-A-A
- A-A-B
- A-A-C
- A-B-A

1,5

ou tout autre arbre  
comportant B et  $\bar{B}$   
et la méthode correspondante

Soit  $E$  "aucune des trois réponses n'est celle d'un jeune diplômé poursuivant ses études"

Donc  $\bar{E}$  est l'événement "l'une au moins des réponses est celle d'un jeune diplômé poursuivant ses études"

Donc  $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

avec  $P(E) = (0,61)^3 + 3 \times (0,61)^2 \times 0,21 + 3 \times (0,61) \times (0,21)^2 + (0,21)^3$

$P(E) \approx 0,55$  donc  $P(\bar{E}) \approx 0,45$

0,5

4.  $\bar{S} = 21 \times 0,05 + 24 \times 0,15 + \dots$

$+ 36 \times 0,2 + 39 \times 0,1$

$= 30,63$

soit 30630 euros

Exercice 2 (5 points) spécialité

0,5

1. a. d'après l'énoncé

$$p(A_{n+1}/A_n) = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad p(A_{n+1}/B_n) = \frac{2}{5}$$

b. \*  $p(A_{n+1} \cap A_n) = p(A_{n+1}/A_n) \times p(A_n) = \frac{1}{5} p_n$

de même  $p(A_{n+1} \cap B_n) = \frac{2}{5} q_n$

1,5

$$\begin{aligned} * p_{n+1} &= p(A_{n+1}) \\ &= p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap B_n) \quad \text{car } A_n \cap B_n = \emptyset \\ &= \frac{1}{5} p_n + \frac{2}{5} q_n \end{aligned}$$

2. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on a :

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{3} \dots = -\frac{1}{5} u_n$$

1,5

Donc  $(u_n)$  est une suite géométrique de premier terme  $u_1 = \frac{1}{6}$  et de raison  $-\frac{1}{5}$ .

3. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  on a :

$$u_n = u_1 \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\text{et } p_n = \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

1,5

•  $\frac{1}{5} < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{3}$

Problème (10 points)

Partie A (4 points)

0,5

1. a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$

b.  $f'(x) = \dots = x(x-1)e^x$

1,75

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	0	-	+
$f(x)$	-1	$e-4$	$+\infty$

2. sur  $[0, 1]$  ou a:  $f(x) \leq -1$  donc  $f$  ne peut pas s'annuler

sur  $[1, +\infty[$   $f$  est dérivable et strictement croissante

$f(1) < 0$  et  $f(2) > 0$  car  $f(2) \approx 3,39$

Donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $x_0$ , avec  $x_0 \in ]1, 2[$ .

$x_0$ : valeur arrondie à  $10^{-3}$  1,646

1,25

3. Des questions précédentes, on déduit:

pour tout  $x$  de  $[0, x_0]$   $f(x) \leq 0$

pour tout  $x$  de  $]x_0, +\infty[$   $f(x) > 0$

0,5

Partie B (2,5 points)

1,5

1.  $C'_m(x) = \dots = \frac{(x^2 - 2x + 3)e^x - 4}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$

d'où  $C_m$  strictement décroissante sur  $]0, x_0]$

et strictement croissante sur  $[x_0, 3]$ .

2. L'entreprise a un coût moyen minimum pour  $x_0$  tonnes de produit fabriqué, c'est-à-dire 1,646 tonnes

Ou a:  $C_m(x_0) = 1,164$  arrondi à  $10^{-3}$  donc un coût moyen de 1,164 centaines de milliers d'euros soit 116 000 euros.

1

Partie C (3,5 points)

1

1. a.  $B(x) = 3x - C_T(x) = \dots = (3-x)e^x - 4$

b.  $B'(x) = (2-x)e^x$

Donc  $B'(x)$  est du signe de  $2-x$

1

D'où  $B$  est strictement croissante sur  $[0, 2]$  et strictement décroissante sur  $[2, 3]$ .

Le bénéfice est maximum pour une production de 2 tonnes de produit.

1

2. a.

b. L'entreprise réalise un gain lorsque  $B(x) > 0$ , c'est-à-dire lorsque  $x \in ]x_1, x_2[$  avec  $x_1 \approx 0,5$  et  $x_2 \approx 2,7$ .

0,5