BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION DE 2001

MATHÉMATIQUES

spécialité

SÉRIE : ES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 heures. – COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 *(4 points)*

Une université propose aux étudiants trois orientations et trois seulement : une filière A, une filière B et une filière C. Chaque étudiant de l'université est inscrit dans une des trois filières et une seule.

Les effectifs de la filière A sont le double de ceux de la filière B.

Les effectifs de la filière B sont le triple de ceux de la filière C.

On sait de plus que :
20 % des étudiants de la filière A sont des filles ;
30 % des étudiants de la filière B sont des filles ;
40 % des étudiants de la filière C sont des filles.

On choisit au hasard un étudiant de cette université.

On note A l'événement : l'étudiant est inscrit dans la filière A. De même pour B et C.

On note F l'événement : l'étudiant est une fille ; G l'événement : l'étudiant est un garçon.

1. Calculer les probabilités des événements A , B , C ; on vérifiera que $p(B) = 0{,}3$.
2. Calculer la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A et soit une fille.
   Montrer que $p(F) = 0{,}25$.
3. Calculer la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A sachant que c'est une fille.
4. L'étudiant, choisi au hasard, n'est pas inscrit dans la filière A. Calculer alors la probabilité que ce soit une fille.

Exercice 2 *(5 points)*

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Un club de sport propose deux types d'abonnements non permutables.

Formule A : une cotisation annuelle de 500 F à laquelle s'ajoute la première année seulement un droit d'entrée de 10 000 F.

Formule B : une cotisation annuelle initiale de 1 000 F qui augmente de 10 % par an. Dès la seconde année, pour fidéliser la clientèle, on effectue une réduction de 50 F sur la cotisation annuelle. Si C_n est le montant, exprimé en francs, de la cotisation annuelle la n-ième année, on a $C_1 = 1\,000$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a $C_{n+1} = 1{,}1\ C_n - 50$.

1. Déterminer la somme T_n versée au club de sport par membre pendant n années avec la formule A.

2. Soit (D_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $D_n = C_n + \alpha$ où α est un réel. Déterminer le réel α pour que la suite (D_n) soit une suite géométrique de raison 1,1 et préciser le terme initial de la suite.

3. On suppose dans cette question que $\alpha = -500$.

   a. Exprimer D_n puis C_n en fonction de n.

   b. Soit S_n la somme versée au club par un membre pendant n années avec la formule B.

   Montrer que $S_n = 5\,000\,[(1{,}1)^n - 1] + 500\,n$.

   c. Quel nombre minimum d'années un membre doit-il cotiser pour que la formule A soit plus avantageuse que la formule B ?

Tournez la page S.V.P.

Problème *(11 points)*

On donne les fonctions f et g, définies sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1{,}1\,x + \ln x - \ln(x+1) \qquad g(x) = 1{,}1\,x + \frac{1}{x}.$$

On désigne par (C) et (C′) leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

Partie A

1. Étudier les variations de f sur $[1\,;+\infty[$.
   Trouver la limite en $+\infty$ de $\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.
   En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 1{,}1\,x$ est une asymptote de la courbe (C). Étudier la position de (C) par rapport à (D).
3. Tracer (C) et (D).

Partie B

1. Étudier les variations de g sur $[1\,;+\infty[$ et la limite de g en $+\infty$.
2. Vérifier que la droite (D) est une asymptote de la courbe (C′).
   Quelle est la position de (C′) par rapport à (D) ?
3. Tracer (C′) dans le même repère que (C) et (D).
4. On pose $\mathrm{H}(x) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln x$, pour tout x de $[1\,;+\infty[$.
   Calculer $\mathrm{H}'(x)$; en déduire une primitive sur $[1\,;+\infty[$ de la fonction $i : x \mapsto g(x) - f(x)$.
5. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^5 [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$.

   En donner une interprétation graphique.

Partie C

Les fonctions f et g données plus haut modélisent respectivement la quantité d'objets produits par une entreprise et la quantité d'objets commandés à cette entreprise.

Plus précisément, si t est la date exprimée en semaines, $f(t)$ est la quantité d'objets produits à la date t en milliers et $g(t)$ la quantité d'objets commandés à cette même date en milliers.

1. Lorsque l'on a $f(t) \geq g(t)$, on dit que « la demande est satisfaite à la date t ».
   Démontrer que la demande n'est jamais satisfaite.
2. On admet que le nombre total d'objets, en milliers, dont la demande n'est pas satisfaite entre les dates n et n' avec $n' > n$ est donné par $\displaystyle\int_n^{n'} [g(t) - f(t)]\,\mathrm{d}t$.
   Donner, à un objet près, le nombre total d'objets dont la demande n'est pas satisfaite entre les dates 1 et 5.
3. On considère que « le niveau de fabrication est suffisant » lorsque moins de 20 demandes d'objets ne sont pas satisfaites, c'est-à-dire lorsque l'on a : $g(t) - f(t) < 0{,}02$.
   En admettant que $g - f$ est une fonction strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$, à partir de quelle date le niveau de fabrication est-il suffisant ?

BACCALAURÉAT, SÉRIE ES
ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE ET ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ
FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. STATISTIQUE

Moyenne, variance, écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i \ ; \ V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

Droites de régression

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - \bar{x}\,\bar{y}$$

$$y = ax + b, \text{ où } a = \frac{\sigma_{xy}}{V(x)}$$

$$x = a'y + b', \text{ où } a' = \frac{\sigma_{xy}}{V(y)}$$

Coefficient de corrélation linéaire

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

II. COMBINATOIRE - DENOMBREMENTS *(SPÉCIALITÉ)*

Soit E un ensemble de n éléments

Nombre de sous-ensembles de p éléments de E :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\ \cdots\ (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

où $n! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n$; $0! = 1$

$$C_n^p = C_n^{n-p} \ ; \quad C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$$

III. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$

Si $A_1, \cdots, A_n$ forment une partition de A, $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Dans le cas équiprobable :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$$

Probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé

$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$; $P(A|B)$ se note aussi $P_B(A)$

Cas où A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Formule des probabilités totales

Si les événements $B_1, B_2, \cdots, B_n$ forment une partition de Ω, alors $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n)$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2$

Ecart type $\sigma_x = \sqrt{V(X)}$

Loi binomiale ***(SPÉCIALITÉ)***

$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$; $E(X) = np$

IV. ALGÈBRE

A. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + b^n$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

B. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

C. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMETRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

V. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$ln\, 1 = 0$

$ln\, e = 1$

$ln\, ab = ln\, a + ln\, b$

$ln \dfrac{a}{b} = ln\, a - ln\, b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = exp\, x = e^x$ équivaut à $x = ln\, y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x\, ln\, a}$ $(a > 0)$

$log\, x = \dfrac{ln\, x}{ln\, 10}$

$(e^a)^b = e^{ab}$

$ln\, a^x = x\, ln\, a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha\, ln\, x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$

$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x\to+\infty} ln\, x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x\to 0} ln\, x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln\, x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln\, x}{x^\alpha} = 0$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTEGRAL*

Formule fondamentale

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Si $a \leqslant b$ et $m \leqslant f \leqslant M$,

alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *EQUATIONS DIFFERENTIELLES*

Équations	Solutions sur I
$\frac{f'}{f} = k$, $f > 0$ sur un intervalle I	$f(x) = Ce^{kx}$, $C > 0$

CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

Exercice 1 (4 points)

0,75	1. $p(A) = 0,6$ $p(B) = 0,3$ $p(C) = 0,1$
1,5	2. $p(F \cap A) = 0,12$ $p(F) = 0,25$
0,75	3. $p(A/F) = 0,48$
1	4. $p(F/\bar{A}) = 0,325$

exercice 2 (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

5 points

0,75 1. $T_n = 10\,000 + 500n$

2. $\alpha = -500$

1 $D_1 = 500$

3. a. $D_n = 500 \times (1,1)^{n-1}$

1,25 $C_n = 500 \times (1,1)^{n-1} + 500$

b. $S_n = C_1 + \ldots + C_n$

1 $= 5000\left((1,1)^n - 1\right) + 500n$

1 c. $T_n \leqslant S_n \iff n \geqslant \dfrac{\ln 3}{\ln 1,1}$

Le nombre minimum d'années est 12.

Exercice 2 (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)
5 points

0,75	1. 25,5 %
1	2. nuage de points
0,75	3. G (10,57 ; 66,83)
	4. $r \simeq 0,98$
0,75	droite d'ajustement affine : $y = 0,85x + 57,79$
0,75	Tracé de (D)
1	5. 116 milliers de francs

Problème (10 points)

3,5

A. 1. $f'(x) = 1,1 + \frac{1}{x(x+1)}$ donc $f'(x) > 0$ sur $[1, +\infty[$ et f strictement croissante sur $[1, +\infty[$ — 1,5

$\lim_{x \to +\infty} \ln \frac{x}{x+1} = \ln 1 = 0$ d'où $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2. $f(x) - 1,1x = \ln \frac{x}{x+1}$

donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) - 1,1x = 0$ donc (D) asymptote à (C) — 1

sur $[1, +\infty[$, $f(x) - 1,1x < 0$ donc (C) en dessous de (D)

3. Tracé de (C) et (D) — 1

4,5

B. 1. $g'(x) = 1,1 - \frac{1}{x^2}$; sur $[1, +\infty[$, $g'(x) > 0$, donc

g strictement croissante sur $[1, +\infty[$ — 1,25

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

2. $\lim_{x \to +\infty} g(x) - 1,1x = 0$ donc (D) asymptote à (C')

sur $[1, +\infty[$, $g(x) - 1,1x > 0$ donc (C') au dessus de (D) — 0,75

3. Tracé de (C') — 0,5

4. $H'(x) = \ln(x+1) - \ln x$ — 0,5

une primitive de i sur $[1, +\infty[$ est $x \mapsto \ln x + H(x)$ — + 0,5

5. $\int_1^5 (g(x) - f(x))\,dx = \Big[\ln x + H(x)\Big]_1^5 = 6\ln 6 - 4\ln 5 - 2\ln$ (ou autre expression) — 0,5

(valeur approchée 2,9 unités d'aire)

interprétation : on vérifie que l'on a : $g(x) \geq f(x)$ — + 0,5

2

C. 1. D'après B.5, on déduit : $f(t) \leq g(t)$ pour $t \geq 1$ donc demande jamais satisfaite — 0,5

2. $\int_1^5 (g(t) - f(t))\,dt$, d'où d'après B.5. on a donc $\simeq 2\,927$ objets — 0,75

3. On a : $i(99) \simeq 0,02015$, $i(100) \simeq 0,0199$. — 0,75

date : 100 ..