

EXAMEN FINAL**PARTIE I – A et B sont indépendants**

A – Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un n échantillon issu d'une loi de Poisson de paramètre λ inconnu que l'on veut estimer. (La variable parente X est telle que $P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ où $x \in \mathbb{N}$), soit la

$$\text{statistique } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

1) Vérifier que \bar{X} est un estimateur sans biais de λ ?

2) Ecrire la fonction de vraisemblance de l'échantillon.

3) On veut montrer que \bar{X} est efficace pour estimer λ .

- Expliquer la démarche à suivre.
- Effectuer les calculs – Conclusion.

4) Sans calculs supplémentaires, peut-on affirmer que \bar{X} est de maximum de vraisemblance pour estimer λ .

B – Un échantillon aléatoire de 10 prélèvements indépendants est issu d'une population distribuée suivant une loi normale. Les valeurs sont :

1,19 ; 1,08 ; 1,18 ; 1,13 ; 1,16 ; 1,20 ; 1,15 ; 1,13 ; 1,10 ; 1,14.

- Donner une estimation de la moyenne et de l'écart type de la population. On précisera les estimateurs utilisés et leurs propriétés (sans démonstration).
- Calculer l'intervalle de confiance à 95 % de la moyenne de la population.

A – Deux échantillons aléatoires sont tirés de façon indépendante dans deux populations normales d'où sont prélevées $n_1 = n_2 = 20$ unités indépendantes.

Les valeurs sont :

- Echantillon 1 : 8 ; 7,8 ; 8,8 ; 8 ; 7,8 ; 8 ; 7,9 ; 8 ; 8,1 ; 8 ; 8,1 ; 7,7 ; 7,5 ; 8 ; 8 ; 8,1 ; 7,9 ; 7,8 ; 8,2.
- Echantillon 2 : 7,7 ; 7,8 ; 8,4 ; 8,2 ; 8 ; 7,9 ; 8,2 ; 7,8 ; 8,1 ; 8,1 ; 7,9 ; 8,1 ; 8 ; 8,2 ; 8,4 ; 8,1 ; 8,4 ; 8,1 ; 7,8 ; 8,2.

- 1) Donner une estimation de la moyenne et de la variance de chacune des populations.
- 2) Faire le test de comparaison des deux variances en adoptant $\alpha = 0,05$.
- 3) En admettant que les variances sont égales, construire le test de comparaison des moyennes des deux échantillons. (On veut tester $m_1 = m_2$ contre $m_1 \neq m_2$. Conclusion. ($\alpha = 10\%$).

B – Le directeur des ventes d'une entreprise veut savoir s'il existe des différences significatives entre les régions en terme de niveau d'accueil d'un nouveau produit. Les résultats suivants ont été obtenus à partir d'un échantillon aléatoire de clients.

<u>NIVEAU D'ACCUEIL</u>	<u>REGIONS</u>				<u>TOTAL</u>
	<u>Nord</u>	<u>Est</u>	<u>Sud</u>	<u>Ouest</u>	
<u>Faible</u>	22	35	0	5	62
<u>Modéré</u>	84	55	8	24	171
<u>Fort</u>	25	17	22	12	76
	<u>131</u>	<u>107</u>	<u>30</u>	<u>41</u>	<u>309</u>

- 1) Sous l'hypothèse d'indépendance des deux caractères "région" et "niveau d'accueil", déterminer le tableau des effectifs théoriques.
- 2) Effectuer le test d'indépendance des deux caractères - Conclusion.