



Une rédaction complète sera appréciée. Tous les résultats doivent être soigneusement justifiés.
Comme dans tout document écrit, la présentation doit être irréprochable.

Durée deux heures Matériel autorisé: Calculatrice Tables de Statistiques

Problème I (sur 12 points)

Un statisticien en vacances en Provence assiste à un concours local de pétanque et s'intéresse à la difficulté de faire un carreau (percuter une boule sans avoir touché le sol auparavant).

L'observation d'une centaine de tirs lui a permis de mesurer l'éloignement entre le point d'impact sur le sol et la cible. Si x (exprimé en centimètres) est négatif, la boule est tombée avant, et si x est positif, elle est tombée plus loin.

Les résultats sont consignés dans le tableau suivant (x = distance, n = nombre de tirs):

x	-30	-25	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20	
n	3	3	5	6	8	14	17	13	11	7	7	6

1°) A l'aide du papier Gausso-arithmétique joint, montrer qu'on peut considérer en première approximation, la distance comme étant normale. Déterminer une estimation graphique des paramètres de cette loi, en arrondissant à l'entier ou au demi le plus proche (par exemple 9,5 pour 9,3).

2°) On veut tester la normalité de cette loi de manière analytique.
Effectuer un test du χ^2 au seuil de 5% d'ajustement à une loi normale.

3°) Ce statisticien, dont la curiosité n'a d'égale que le sens expérimental, décide de se livrer lui-même à des expériences de *carreaux*.

Au cours de 30 tentatives, supposées indépendantes, à l'abri des regards, il a obtenu les résultats suivants :

20	1	3	-1	15	16	-11	10	-1	8	8	0	6	-2	-4
1	16	18	25	14	-38	-21	2	-8	-10	-36	12	-3	31	-6

- a) Déterminer un intervalle de confiance à 0,95 de sa moyenne M_1 .
- b) Tester $M_1 = 0$ contre $M_1 = 8$, et déterminer la puissance du test.

4°) Un de ses collègues se livre à la même expérience dans les mêmes conditions, avec les résultats :

13	-2	-20	25	-7	8	19	-9	1	-2	1	-12	-6	-3	8	-20	-27	11	-17	-11
----	----	-----	----	----	---	----	----	---	----	---	-----	----	----	---	-----	-----	----	-----	-----

- a) Tester l'égalité des variances au seuil 0,05, donner une estimation de la variance commune.
- b) Conclure avec la comparaison des moyennes.

5°) Les clubs de deux villes A et B participent à la sélection pour le concours régional. Parmi les 150 membres de A, 32 ont été sélectionnés alors qu'il y en a eu 50 sur 200 dans B. Peut-on affirmer, au niveau 0,95, qu'il y a une différence de niveau entre les deux villes ?

Problème II (sur 8 points)

Par une superbe nuit étoilée du mois d'août, on observe les étoiles filantes, et on note X le nombre d'apparitions au cours de périodes de 4 minutes. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ qu'on cherche à déterminer.

1°) On considère un échantillon (X_1, \dots, X_n) d'observation (x_1, \dots, x_n) de n périodes de 4 minutes indépendantes, où les variables X_k ont la même loi que X .

a) Ecrire les équations de vraisemblance de l'échantillon, et en déduire un estimateur de λ .

b) Après un peu plus d'une heure d'observation on a obtenu les résultats suivants :

2 0 1 0 1 2 4 0 1 1 1 2 3 0 0 1

Déterminer une estimation ponctuelle de λ .

2°) On veut tester $\lambda = 1$ contre $\lambda > 1$ au niveau 0,95 à l'aide de la variable de test $Y = \sum_{k=1}^n X_k$.

a) Déterminer la loi de Y , ainsi que ses paramètres (espérance, variance).

b) En déduire le domaine d'acceptation de l'hypothèse nulle et la décision à prendre.

3°) Le temps d'attente T (exprimé en minutes) avant l'apparition d'une étoile filante est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\mu = 0,25$.

a) Calculer la probabilité de n'avoir aucune étoile filante pendant quatre minutes, et comparer ce résultat à celui qui serait donné avec une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.

b) Soit une suite (T_1, \dots, T_n, \dots) de variables indépendantes de même loi que T . On note S_2 le temps d'attente avant la deuxième étoile filante, puis S_n le temps d'attente avant la $n^{\text{ème}}$ étoile filante. Exprimer S_2 puis S_n en fonction de T_1, T_2, \dots, T_n , puis calculer la densité $f_2(t)$ de S_2 .

c) Montrer par récurrence que la densité de S_n est de la forme $f_n(t) = \frac{t^{n-1} \mu^n e^{-\mu t}}{(n-1)!}$ sur \mathbb{R}^+ .

d) Que représentent les probabilités $p(S_n < 4)$ et $p((S_n < 4) \cap (S_{n+1} > 4))$?

e) En déduire la probabilité d'avoir exactement n étoiles filantes ($n \in \mathbb{N}$) au cours d'une période de quatre minutes. Comparer le résultat à celui donné par la loi de Poisson.

N.B. La nuit la plus propice (si le temps le permet) pour observer les étoiles filantes sera cette année celle du dimanche 12 août 2001. Il sera toutefois trop tard pour formuler des vœux de réussite à l'UV SQ 20.

Document joint : papier gausso-arithmétique

*Qui ira donc compter les batailles perdues
Le jour de la victoire ?*

Bjørnstjerne BJØRNSON (Norvège: 1832–1910)