SQ 20 — Final Automne 03 — Lundi 19 janvier 2004

université de technologie Belfort-Montbéliard

Matériel autorisé: une feuille aide-mémoire A4 recto, calculatrice, Tables de statistiques

Les deux parties doivent être rédigées sur des copies séparées

On se place dans une Université imaginaire dont certaines règles de fonctionnement sont inhabituelles

I. Première partie (13 points)

1°) L'obtention de chaque UV se fait de manière aléatoire, avec une probabilité p de réussite. Un étudiant prépare 6 UV au cours d'un semestre, et on note N le nombre d'UV réussies. On considère un échantillon de 100 étudiants et on observe les résultats suivants :

Nb d'UV réussies	0	1	2	3	4	5	6
Nb d'étudiants	2	2	9	31	28	21	7

a) Déterminer la loi de N. Calculer un estimateur de maximum de vraisemblance du paramètre p.

b) En déduire une estimation ponctuelle de p.

2°) On se propose d'examiner la répartition des notes à l'aide des résultats d'un examen final, rassemblés dans le tableau ci-dessous :

intervalles	6	7	8	9	10	11	12	13
effectifs	4	3	6	15	24	18	18	6	6

a) A l'aide du papier de Gauss joint, montrer qu'on peut considérer que cette distribution est normale.

b) Déterminer graphiquement des estimations de l'espérance et de la variance.

3°) On étudie le niveau d'une promotion (très nombreuse) à partir d'un échantillon de 20 étudiants, représenté par les notes à l'examen final. On suppose que ces notes ont une répartition normale $X \approx \mathcal{N}(M, \sigma^2)$ et que les étudiants sont indépendants :

12 13 14 10 8 11 10 13 9 12 7 16 9 14 12 11 12 10 8 8

a) Calculer des estimations ponctuelles de M et de σ^2.

b) Déterminer un intervalle de confiance de M au niveau 0,95.

c) Effectuer le test H_0 : M = 10,5 contre H_1 : M = 12. Déterminer le domaine d'acceptation, la décision et la puissance du test.

d) Quel aurait été l'intervalle de confiance si σ avait été connu (σ = 2,5) et la promotion de 60 étudiants ?

4°) On a vu, au soleil couchant et dans la cafétéria, deux étudiants stressés se battre furieusement au sujet des niveaux en Statistiques de leurs promotions. C'est pourtant là qu'ils supportent le mieux la pression… La réalité correspond aux données :

Promo 1 : taille de l'échantillon : 30 moyenne $m_1 = 10$, estimation de l'écart type $s_1 = 2$

Promo 2 : taille de l'échantillon : 20 moyenne $m_2 = 11$, estimation de l'écart type $s_2 = 2{,}5$

a) Peut-on conclure, au niveau 0,95, que les deux variances sont égales ?

b) Après avoir déterminé une estimation de la variance commune, tester l'égalité des moyennes au même niveau.

II. Seconde partie (8 + 3 points)

1°) Un étudiant est perplexe quant à son choix d'UV pour le prochain semestre. Il hésite entre SQ 24 et MT 22. On lui a dit que SQ 24 était la plus facile. Voire …

En fait, d'après un échantillon de 300 étudiants ayant suivi SQ 24, 220 ont réussi, alors que sur 400 étudiants de MT 22, 250 ont obtenu leur UV. On note p_s et p_m les probabilités (réelles) de réussir dans ces deux UV. Peut-on affirmer, au niveau 0,95, que SQ 24 est plus facile ?

2°) On effectue une enquête (anonyme) sur le temps de travail personnel hebdomadaire d'un étudiant pour une UV. Les résultats (en heures) sont les suivants.

Temps en heures		0,5		1		1,5		2		2,5		3		3,5		4	
Nb d'étudiants	14		20		14		13		12		5		6		5		11

On suppose que ce temps T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,5$, mais on souhaite vérifier cette affirmation.

a) Écrire la densité et la fonction de répartition F_T de T. Calculer, et présenter sous forme d'un tableau, les valeurs $F_T(0,5\ k)$, pour k entier variant de 0 à 8 .

b) A l'aide d'un test du χ^2, vérifier si l'affirmation (la loi est exponentielle de paramètre 0,5) se confirme, au niveau 0,95. On pourra considérer que le dernier intervalle est en réalité $[4, \infty[$.

3°) Les résultats sont-ils indépendants du travail fourni ? Question délicate …

Une enquête auprès de 400 étudiants s'intéresse à la quantité W de travail fournie (légère, moyenne, énorme) et au résultat R à l'examen final (lamentable, correct, brillant). On a consigné les résultats dans le tableau ci-contre.

Peut-on conclure, au niveau 0,95, à l'indépendance entre le travail fourni et le résultat ?

R↓ \ W →	léger	moyen	énorme	totaux
lamentable	45	36	5	86
correct	27	150	40	217
brillant	2	40	55	97
totaux	74	226	100	400

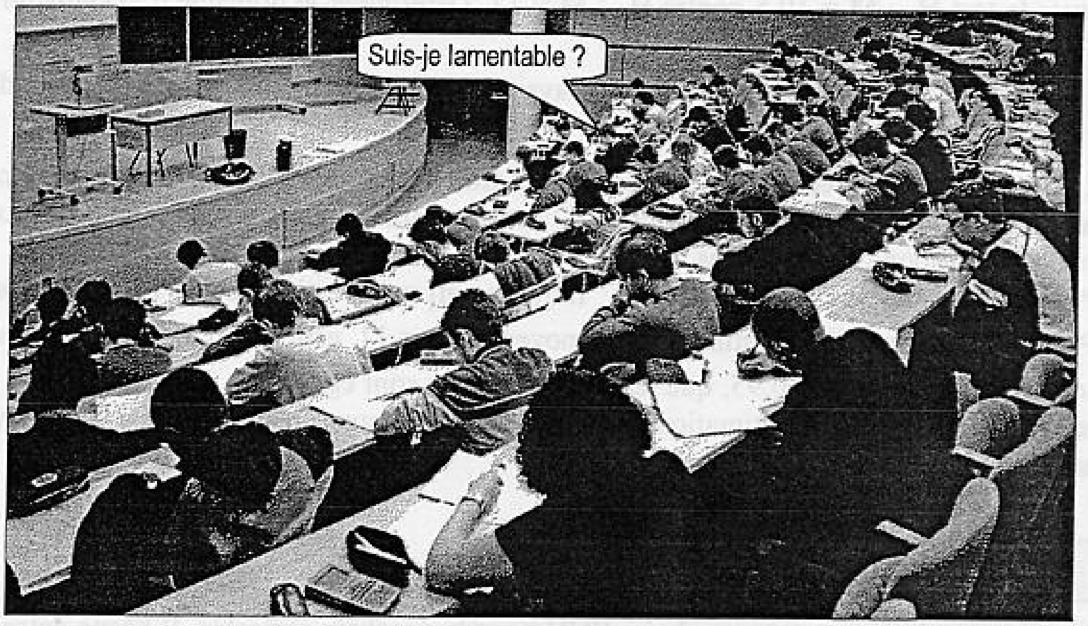
4°) Question supplémentaire, hors barème (sur 3 points)

Un étudiant suit n UV pour lesquelles les temps de travail personnel hebdomadaire $T_1, \dots, T_n$, suivent des lois exponentielles indépendantes de même paramètre $0,5 = \lambda$. On note S_n le temps total pour les n UV suivies. (On admet que n est un entier naturel non nul).

a) Montrer par récurrence que S_n est une loi continue, de densité $\varphi_n(t) = \dfrac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} 1_{R^+}(t)$.

b) Dans le cas n = 6, cet étudiant souffre de surmenage si son temps de travail dépasse 21 heures par semaine. Avec la calculatrice, déterminer la probabilité de l'événement A = « l'étudiant est surmené ».

c) Un deuxième étudiant consacre exactement le même temps à toutes ses six UV. Quelle est pour lui la probabilité de l'événement A ?



Il n'y a pas de grandeur où il n'y a pas de vérité

Gotthold Ephraïm LESSING (Allemagne 1729 – 1781)