Traitement Numérique du Signal
Médian Printemps 2001

Le sujet comprend 3 exercices totalement indépendants. Dans chacun d'entre eux certaines questions sont indépendantes.
Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont autorisées.
La dernière page du sujet contient un formulaire.

Chaque exercice sera rédigé sur une feuille séparée.

I-) Signal triangulaire.

Un signal numérique, $\{x(n)\}$, prend les valeurs ci-contre.

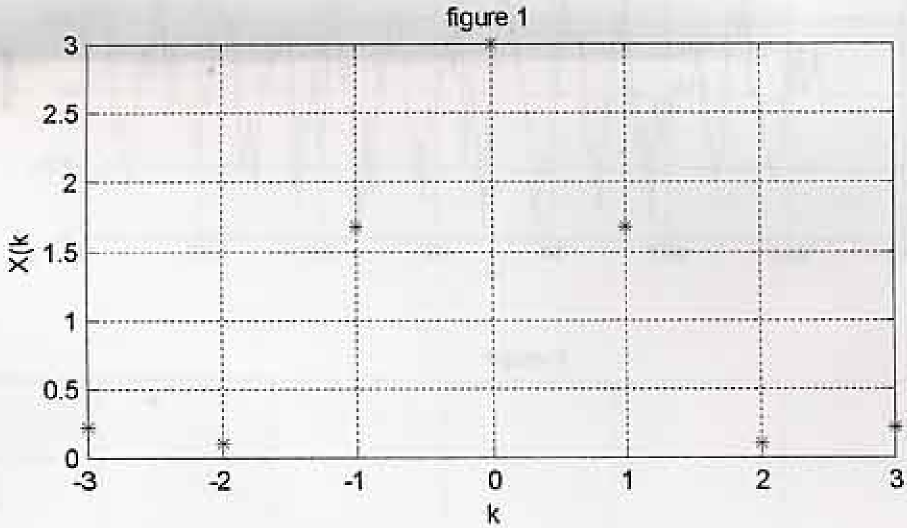
n	x(n)
0	0
1	1/3
2	2/3
3	1
4	2/3
5	1/3
6	0

1) Calculer la transformée de Fourier discrète de $\{x(n)\}$. On notera $\underline{X}(k)$ cette transformée, $X(k)$ son module et on la mettra sous la forme :

$$\underline{X}(k) = X(k)e^{-j2\pi\frac{3k}{7}}.$$

2) La figure 1 est une représentation de $X(k)$. Cette représentation est-elle en accord avec votre calcul ?

figure 1



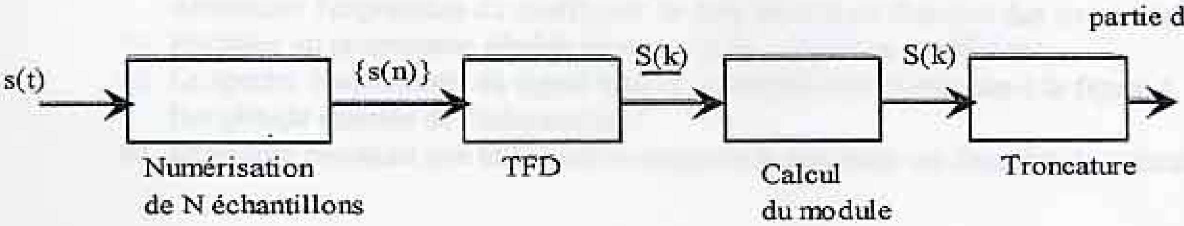
3) Soit $\underline{X}'(k) = X(k)$ la transformée de Fourier d'un signal $\{x'(n)\}$. Calculer $\{x'(n)\}$ et comparer le à $\{x(n)\}$. En déduire la signification du terme exponentiel dans l'expression de $\underline{X}(k)$ obtenue à la question 1.

II-) Détection d'une information.

1) Question préliminaire.

Soit un signal numérique, $s(n) = A\cos(2\pi F_o n T_e)$, dont on possède N termes (n varie de 0 à N-1). Exprimer la transformée de Fourier, $\underline{X}_d(f)$ de s(n) pour des fréquences positives. Quelle est la valeur du spectre d'amplitude en $f = F_o$, $X_d(F_o)$?

2) Un signal très parasité reçu à l'entrée d'un process est susceptible de contenir une information supposée être sinusoïdale. Afin de vérifier la présence, ou l'absence, d'information, le signal subi le traitement suivant :



Le système de traitement calcule la transformée de Fourier discrète de N = 128 échantillons numériques du signal échantillonné à la fréquence de 150 kHz. La troncature consiste à ne conserver que le 1/2 spectre latéral correspondant aux fréquences positives.

Les figures 2 et 3 donnent une représentation de {s(n)} et de S(k) après troncature.

figure 2

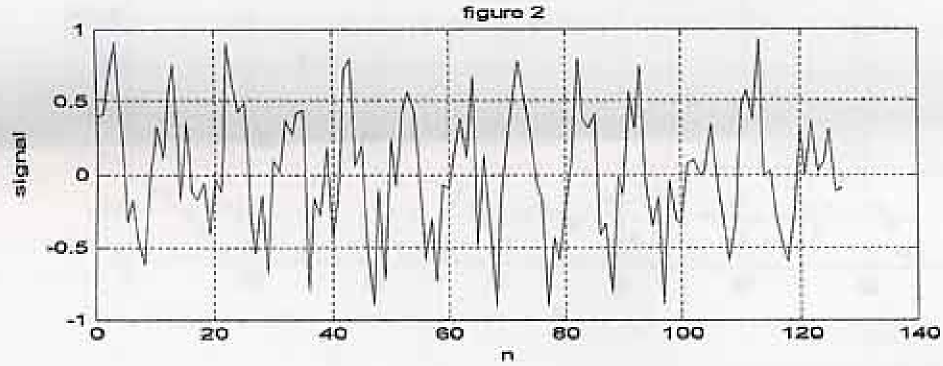
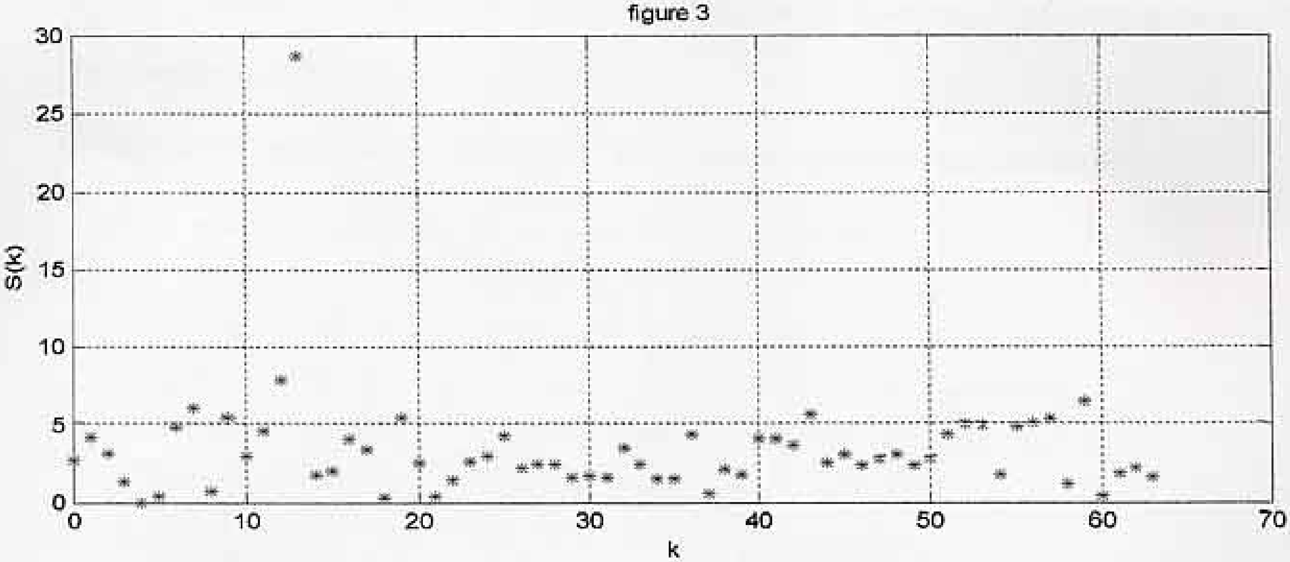


figure 3



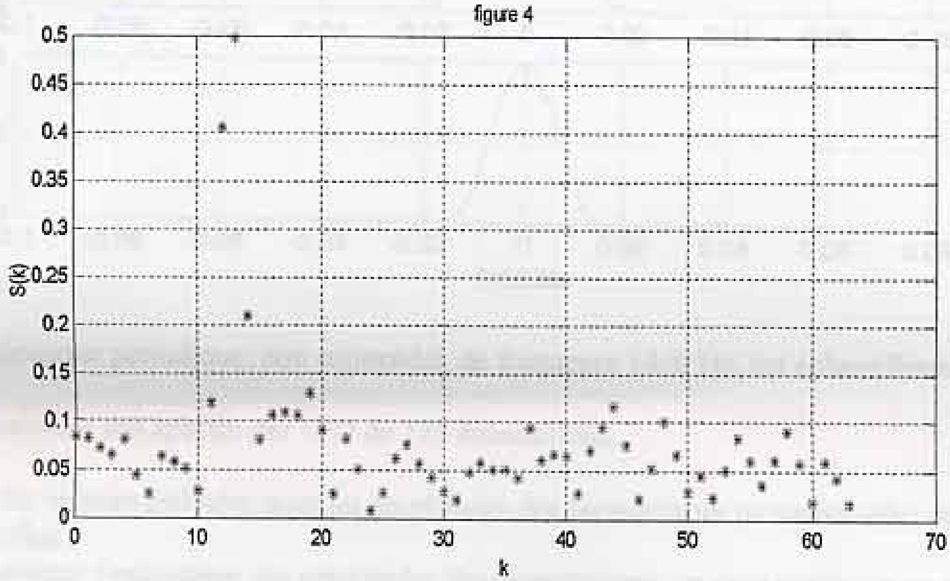
On vous demande de caractériser l'information reçue, c'est à dire:

- quelle est sa fréquence et avec quelle précision est-elle estimée ?
- quelle est l' amplitude estimée de l'information sinusoïdale?
- quelle est la résolution fréquentielle du système de calcul du spectre ?

Toutes ces réponses seront justifiées.

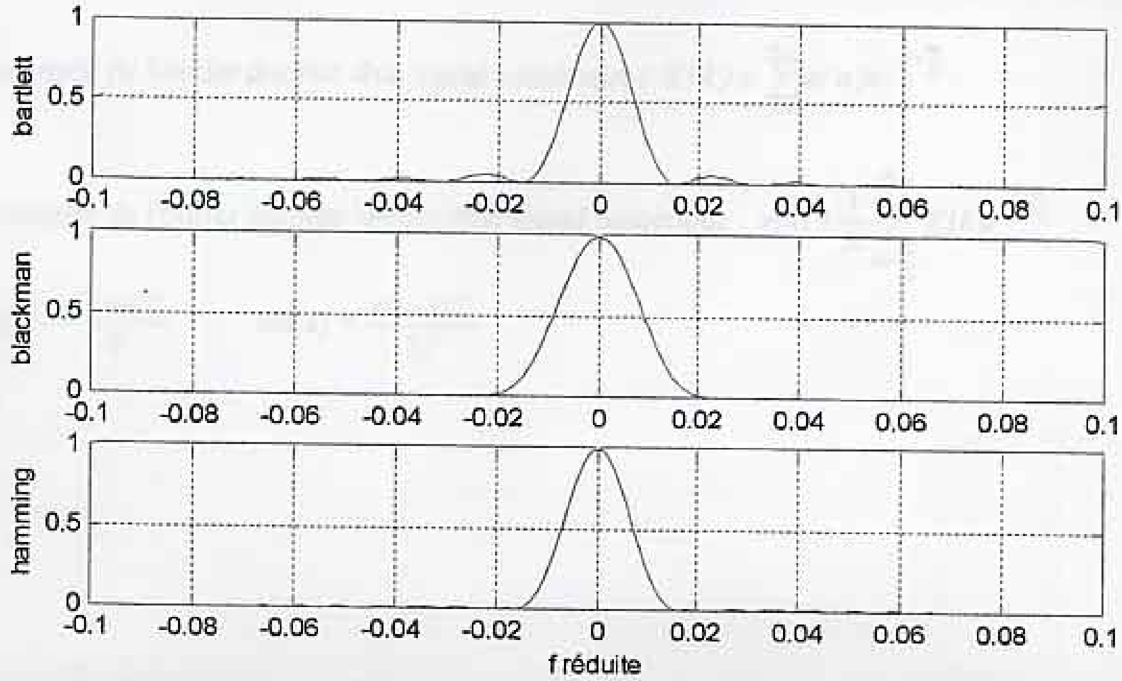
3) Afin d'améliorer la précision dans la mesure de l'amplitude on applique au signal numérisé une fenêtre de Blackman, w(n). Il est cependant nécessaire de multiplier le spectre obtenu par un coefficient de pondération afin de faire une mesure directe des amplitudes. On se propose de calculer ce coefficient. Pour cela on raisonne sur un signal fictif $s_f(n) = A \exp(j\, 2\pi F_o\, n\, T_e)$.

a) En exprimant la transformée de Fourier du signal fictif fenêtrée, calculée pour $f = F_o$, déterminer l'expression du coefficient de pondération en fonction des termes de la fenêtre.
b) Proposer un programme Matlab permettant de calculer ce coefficient.
c) Le spectre coefficienté, du signal fenêtré, est représenté ci-dessous à la figure 4. Quelle est l'amplitude estimée de l'information ?
d) Expliquer pourquoi une telle fenêtre améliore la précision sur l'amplitude estimée du signal.



III-) Choix d'une fenêtre.

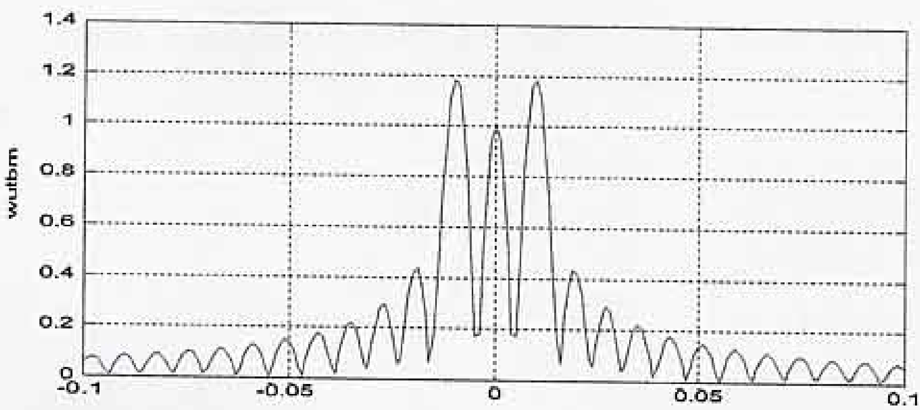
La figure 5 représente les spectres d'amplitudes normalisés obtenus par Transformée de Fourier de 3 fenêtres : Bartlett , Blackman et Hamming. La variable d'abscisse est la fréquence réduite f/F_e.



Un signal analogique périodique, non sinusoïdal, de fréquence 1400 Hz, est échantillonnée à la fréquence de 32 kHz.
On souhaite calculer son spectre par TFD de 128 échantillons.

1) Pourquoi les valeurs estimées pour les amplitudes des harmoniques ne seront-elles pas égales aux valeurs réelles ?
2) Afin d'améliorer l'estimation des amplitudes des harmoniques, on peut appliquer au signal numérisé une des 3 fenêtres citées plus haut. Laquelle (ou lesquelles) choisiriez-vous et pourquoi ?
3) On souhaite concevoir une fenêtre de pondération, $w_{utbm}(n)$, telle que :
   $\underline{W}_{utbm}(k) = 1$ pour $k = -1 , 0 , 1$ et $\underline{W}_{utbm}(k) = 0$ pour les autres valeurs de k comprises entre -N/2 et N/2 - 1.
   Déterminer $w_{utbm}(n)$.

   Ci-dessous une représentation de $w_{utbm}(n)$. Cette fenêtre peut-elle donner satisfaction ?



Formulaire

- ✓ $j^2 = -1$

- ✓ Transformée de Fourier d'un signal numérique limité à N éléments : $\underline{\tilde{X}}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi f n T_e}$

- ✓ Transformée de Fourier discrète d'un signal numérique : $\underline{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$

- ✓ Transformée de Fourier discrète inverse d'un signal numérique : $x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \underline{X}(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$

- ✓ $\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$; $\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$